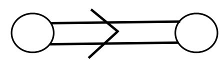
Teoria dos Grupos - SFI 5823

Trabalho II - 14/06/2022

Entrega: 21/06/2022

1. **(2,0)** Considere o diagrama de Dynkin de $SO(5)$ dado na figura abaixo



   (a) Calcule a matriz de Cartan.

   (b) Calcule o sistema de raízes.

   (c) Calcule as relações de comutação.

   (d) Mostre como fazer uma escolha consistente dos cociclos $\varepsilon\,(\alpha\,,\,\beta)$.

2. **(1,5)** Considere dois conjuntos A e B de vetores em um espaço Euclideano de dimensão 3, dados por

$$\begin{aligned} A &= \{\pm\vec{e}_i\,,\,\pm(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\;\;,\; i\neq j\;\;;\;\; i,j=1,2,3\} \qquad (12\;\;\text{vetores}) \\ B &= \{\pm\vec{e}_i\,,\,\pm(\vec{e}_i-\vec{e}_j)\;,\,\pm(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\;\;,\; i\neq j\;\;;\;\; i,j=1,2,3\} \qquad (18\;\;\text{vetores}) \end{aligned}$$

   onde $\vec{e}_i$, $i=1,2,3$, constitui um conjunto de 3 vetores unitários e ortogonais entre si, i.e. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$.

   (a) Verifique se cada um destes conjuntos de vetores pode constituir um conjunto de raízes de uma álgebra de Lie. Justifique sua resposta.

   (b) No(s) caso(s) afirmativo(s) determine um conjunto de raízes simples, construa a matriz de Cartan e desenhe o diagrama de Dynkin.

3. **(1,5)** Verifique se a subálgebra (de dimensão 3) de $sl(4)$ gerada por

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\;;\qquad \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\;;\qquad \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

   é uma subálgebra de Cartan. Justifique.

4. **(1,5)** A matriz de Cartan da álgebra de Lie do grupo $SU(5)$ é dada por

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Construa o diagrama de Dynkin desta álgebra de Lie.

   (b) Construa as raízes de $SU(5)$

   (c) Considere o gerador de $SU(5)$ dado por

$$Q = \frac{2\,\lambda_2 \cdot H}{\alpha_2^2} \qquad\qquad \text{onde} \qquad\qquad \frac{2\,\lambda_2 \cdot \alpha_a}{\alpha_a^2} = \delta_{a,2}$$

   ou seja λ_2 é um vetor ortogonal a todas as raízes simples com exceção de α_2. Encontre a subálgebra de $SU(5)$ que comuta com Q. Qual sua estrutura (isomórfica a que álgebra)?

   (d) Construa o diagrama de Dynkin da subálgebra de $SU(5)$ que comuta com Q.

5. **(1,5)** A classificação dos diagramas de Dynkin é feita provando-se ser impossível a existência de vários tipos de diagramas. Neste contexto:

   (a) Mostre que um diagrama de Dynkin não possue loops

   (b) Mostre que o número de linhas conectadas a um dado ponto não pode exceder 3

6. **(2,0)** A álgebra de Lie do grupo de Lorentz, de dimensão 6, é definida pelas relações de comutação

$$[\,J_i\,,\,J_j\,] = i\,\varepsilon_{ijk}\,J_k \qquad [\,J_i\,,\,K_j\,] = i\,\varepsilon_{ijk}\,K_k \qquad [\,K_i\,,\,K_j\,] = -\,i\,\varepsilon_{ijk}\,J_k \qquad i,j,k = 1,2,3$$

   (a) Construa a forma de Killing desta álgebra.

   (b) Verifique se a álgebra de Lorentz é semisimples ou não.

   (c) Verifique se ela é compacta ou não compacta.

   (d) Encontre uma subálgebra de Cartan para esta álgebra.

   (e) Encontre as raízes da álgebra de Lie do grupo de Lorentz.

   (f) Escolha uma câmara de Weyl como sendo a fundamental, encontre as raízes simples, construa a matriz de Cartan e o diagrama de Dynkin.