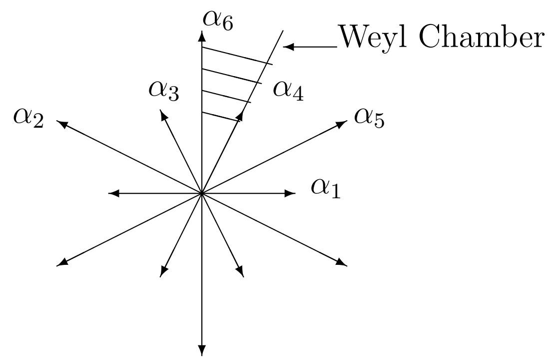
## Lista de Exercício III

1. O diagrama de raízes da álgebra de Lie $G_2$ está mostrado na figura abaixo. Como




   sabemos a cada peso dominante $\lambda$ corresponde uma representação irredutível com peso máximo $\lambda = n_1\,\lambda_1 + n_2\,\lambda_2$, onde $n_a$ são inteiros não negativos e $\lambda_a$, $a = 1, 2$, são os pesos fundamentais. Utilizando a fórmula da dimensionalidade de Weyl calcule as dimensões de todas as representações irredutíveis de $G_2$ em termos dos inteiros $n_a$, $a = 1, 2$. Calcule o valor numérico das dimensões das cinco representações de dimensões mais baixas.

2. Construa um tensor totalmente simétrico de rank 3, invariante pela representação adjunta do grupo $SU(3)$. A partir deste tensor construa um operador de Casimir de ordem 3 para o grupo de Lie $SU(3)$. Escreva este operador de Casimir em termos dos operadores do geradores da álgebra de Lie de $SU(3)$, em um base de sua escolha, e em uma representação qualquer $D\,(T)$. Calcule este operador de Casimir nas representações tripleto e anti-tripleto de $SU(3)$, cujos pesos máximos são $\lambda_1$ e $\lambda_2$ respectivamente.

3. Calcule os carácters da representação tripleto do grupo $SU(3)$, onde o peso máximo é $\lambda_1$.

4. Calcule as matrizes dos geradores da álgebra de $SO(5)$ na representação espinorial, onde o peso máximo é $\lambda_1$.

5. Mostre como a representação adjunta do grupo $G_2$ quebra em representações irredutíveis da subalgebra $SU(2)$, gerada por $H_{\alpha_1}$, $E_{\alpha_1}$ e $E_{-\alpha_1}$, onde $\alpha_1$ é a raiz curta simples.