EXERCÍCIOS 2 DE ESPAÇOS DE HILBERT E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS MAP4003/ MAP5707

Os exercícios abaixo foram retirados ou baseados nos dos livros:

C) Introdução à Análise Funcional, César R. de Oliveira, Projeto Euclides.

Con) A course in functional analysis, John B. Conway, Springer.

B) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haim Brezis, Universitext, Springer.

AU) Partielle Differenzialgleichungen, Arendt and Urban, Springer Spektrum.

GG) Distributions and Operators, Gerd Grubb, Springer.

Lembramos da nossa notação $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Exercício 1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto.

i. Mostre que $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert com os produtos internos

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega \partial_x^\alpha u \partial_x^\alpha v dx = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_\Omega \partial_x^\alpha u \partial_x^\alpha v dx.$$

(Dica: Use que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e repita a demonstração do caso unidimensional).

ii. Prove por indução em m que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert para todo $m \geq 1$.

Exercício 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in H^3(\Omega)$. Mostre que as derivadas fracas de ordem 3 comutam, ou seja,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i},$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, ..., n\}$.

Exercício 3. Sejam $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ e $f : B(0, 1) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x|^\alpha$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que a função f pertença a $H^1(B(0, 1))$ nos casos em que $n = 1$, 2 e 3.

(Observação: É possível generalizar o resultado para $n \geq 4$ também).

Exercício 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado (não necessariamente de classe C^1) e $j \in \{1, ..., n\}$. Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

(Dica: Prove inicialmente para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e depois use um teorema de aproximação adequado).

Exercício 5. Mostre que as funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ são densas em $H^2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, mostre que dado $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Dica: Imite a demonstração feita em sala de aula que mostrou que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 6. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função cuja derivada é limitada, ou seja, $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (Note que $f(0)$ não precisa ser igual a zero! Estamos assumindo Ω limitado). Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$, então $f \circ u \in H^1(\Omega)$ e que $\frac{\partial}{\partial x_j}(f(u(x))) = f'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Exercício 7. Seja $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ e $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$ uma função tal que $\eta(x,y) = 1$ se $x^2+y^2 < 1/2$.

Considere a função

$$u(x,y) = \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)^{1/4} \eta(x,y).$$

i. Mostre que $u \in H^1(B(0,1))$.

ii. Conclua que $H^1(B(0,1))$ contém funções que não são contínuas.

Exercício 8. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.

i. Mostre que $C^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega)$. (Lembre-se que em $C^m(\overline{\Omega})$, as funções e suas derivadas de ordem $\leq m$ têm extensões contínuas em $\overline{\Omega}$).

ii. Dê um exemplo simples de função $u \in C^1(\Omega)$ que não pertença a $H^1(\Omega)$. (Dica: Ache um contraexemplo em $\Omega =]0,1[$ lembrando que se $u \in C^1(]0,1[)$, então u ou u' pode ir ao infinito em 0 ou em 1)

iii. Ache um exemplo de um aberto Ω não limitado que contenha funções em $C^1(\overline{\Omega})$ que não pertençam a $H^1(\Omega)$.

Exercício 9. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Considere funções $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i,j \in \{1,...,n\}$ e $r \in C(\overline{\Omega})$ com $r(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, para todo $x \in \Omega$, $i,j \in \{1,...,n\}$, e que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$. O nosso objetivo é estudar o seguinte problema de contorno:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se u satisfizer as equações do problema de contorno acima.

i. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica, então u é uma solução fraca, ou seja, u pertence a $H_0^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)v(x)\right) dx,$$
$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

ii. Mostre que existe uma única solução fraca da equação.

iii. Mostre que se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Exercício 10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. O teorema da divergência nos diz que para todo $F = (F_1,...,F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, em que $F_j \in C^1(\overline{\Omega})$, a igualdade abaixo vale

$$\int_\Omega \nabla \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS(x),$$

em que $n(x) = (n_1(x),...,n_n(x))$ é a normal que aponta para fora de $x \in \partial\Omega$.

i. Mostre que o teorema da divergência implica na seguinte fórmula de integração por partes:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)v(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_j(x)dS(x),$$

para todo $u,v \in C^1(\overline{\Omega})$. (Dica: Aplique o teorema da divergência para $F = uve_j$, em que $e_j = (0,0,...,1,...,0)$, onde o 1 aparece somente na j-ésima casa.)

ii. Mostre que a fórmula de integração por partes implica no teorema da divergência. (Dica: Escolha $u = F_j$ e $v = 1$ na fórmula de integração por partes e some em j).

Exercício 11. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Considere funções $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ e $r \in C(\overline{\Omega})$ com $r(x) \geq c > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Suponha que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, para todo $x \in \Omega$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, e que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$. O nosso objetivo é estudar o seguinte problema de contorno:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)n_j(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Acima $n(x) = (n_1(x), ..., n_n(x))$ é o vetor unitário normal que aponta para fora de Ω em $x \in \partial\Omega$.

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se u satisfizer as equações acima.

i. Mostre que se $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ para todo $x \in \Omega$, obtemos $-\Delta u + ru = f$ com condições de contorno de Neumann. Aqui δ_{ij} denota o delta de Kronecker: é igual a 1, se $i = j$, e é igual a 0, se $i \neq j$.

ii. Mostre que se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica, então u é uma solução fraca, ou seja, u pertence a $H^1(\Omega)$ e u satisfaz $a(u, v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, em que $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + r(x)u(x)v(x)\right)dx,$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

iii. Mostre que existe uma única solução fraca da equação.

iv. Mostre que se $u \in H^1(\Omega)$ for uma solução fraca que pertence a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Exercício 12. Seja $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, ou seja, $B^TB = I$, e $b \in \mathbb{R}^n$ (Estamos denotando por B^T a matriz transposta de B). Definimos a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $F(y) = By + b$. Seja $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\Omega_1 = F(\Omega_2)$. Mostre que a função

$$Tu(y) = u(F(y))$$

define um operadores unitários $T : H^1(\Omega_1) \to H^1(\Omega_2)$ e $T : H_0^1(\Omega_1) \to H_0^1(\Omega_2)$.

Exercício 13. Seja $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, $b \in \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(y) = By + b$. Seja $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\Omega_1 = F(\Omega_2)$. Seja $f \in L^2(\Omega_1)$ e $u \in H_0^1(\Omega_1)$ uma solução fraca de $-\Delta u = f$. Mostre que $u \circ F \in H_0^1(\Omega_2)$ é uma solução fraca de $-\Delta(u \circ F) = f \circ F$.

Para tanto, lembre-se que a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega_1)$ satisfaz $\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega_1} fv dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega_1)$. Calcule $\nabla(u \circ F) = \nabla(u(By + b))$ e use mudança de coordenada na integral $\int_{\Omega_2} \nabla(u \circ F) \cdot \nabla(\varphi \circ F)dy$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1)$.

Exercício 14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Sejam $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $b_j, c \in C(\overline{\Omega})$. Consideremos o problema de contorno

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dizemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica se satisfizer a equação acima.

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema acima se satisfizer $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, em que $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são dados por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v(x) + c(x)u(x)v(x) \right) dx,$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Vamos supor que exista $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$ para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$.

i. Mostre que a função a é bilinear e contínua.

ii. Suponha que $\sum_{j=1}^n b_j^2(x) \leq 2\alpha c(x)$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que a função a é coerciva. Portanto existe uma única solução fraca. (Dica: prove inicialmente que $u b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \leq \frac{\alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}^2 + \frac{1}{2\alpha} b_j^2 u^2$).

iii. Suponha que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x) \leq 2c(x)$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que a função a é coerciva. Portanto existe uma única solução fraca. (Dica: prove inicialmente que $\int_\Omega b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial b_j}{\partial x_j} u^2 dx$ para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$, usando integração por partes e $\frac{\partial u^2}{\partial x_j} = 2u \frac{\partial u}{\partial x_j}$).

iv. Mostre que se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então u é uma solução clássica.

Exercício 15. Seja $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Considere a função $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left((2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + (2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

i. Mostre que a é uma função bilinear, contínua e coerciva.

ii. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e defina a função $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por $F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$. Mostre que existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

iii. Se a função u do item ii. pertencer a $C^2(\overline{\Omega})$, então u é solução clássica de um problema de contorno. Que problema é esse?

Exercício 16. Seja $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$. Considere a função $a : H^1(\mathbb{R}_+^3) \times H^1(\mathbb{R}_+^3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3} + uv \right) dx_1dx_2dx_3.$$

i. Mostre que a é uma função bilinear, contínua e coerciva. (Dica: Para lidar com o termo $\frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3}$, lembre-se que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$).

ii. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}_+^3)$ e defina a função $F : H^1(\mathbb{R}_+^3) \to \mathbb{R}$ por $F(v) = \int_{\mathbb{R}_+^3} f(x)v(x)dx$. Mostre que existe um único $u \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$.

iii. Se a função u do item ii. pertencer a $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$, então u é solução clássica de um problema de contorno. Que problema é esse?

Exercício 17. Seja $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$ e considere a função

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx_1dx_2.$$

i. Mostre que a função $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é bilinear, contínua e coerciva. (Veja a demonstração da desigualdade de Poincaré para uma estimativa da constante que nela aparece).

Seja $f \in L^2(\Omega)$ e defina $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ pela expressão $F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$.

ii. Mostre que existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

iii. Se a função u estiver em $C^2(\overline{\Omega})$, então ela pode ser considerada uma solução clássica de um problema de contorno. Que problema de contorno é esse?

Exercício 18. Sejam $T, S : H \to H$ operadores lineares limitados.
i. Mostre que se T e S forem compactos, então $T + S$ é compacto.
ii. Mostre que se T é compacto e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αT é compacto.
iii. Mostre que se T é compacto, então TS e ST são compactos.

Exercício 19. Seja $P : H \to H$ uma projeção ortogonal. Dê uma condição necessária e suficiente para que P seja um operador compacto. (Dica: Analise a dimensão da imagem de P).

Exercício 20. Seja $T : H \to H$ um operador unitário. Dê uma condição necessária e suficiente para que T seja um operador compacto. (Dica: Analise a dimensão de H).

Exercício 21. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^2(\Omega)$. Suponha que as funções u_j sejam constantes, ou seja, para cada $j \in \mathbb{N}$ suponha que exista $c_j \in \mathbb{N}$ tal que $u_j(x) = c_j$, para todo $x \in \Omega$. Mostre que se existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, então u também é constante. (Dica: Comece mostrando que a sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy).

Exercício 22. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo e $u \in H^1(\Omega)$ uma função tal que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. O objetivo do exercício é mostrar que u é uma função constante.
i. Mostre que se para todo $x \in \Omega$, existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $u|_U$ é constante, então u é constante em todo Ω. (Dica: use conexidade de Ω. Escolha $x_0 \in \Omega$ e mostre que $\{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$ é um aberto e fechado de Ω).
ii. Defina $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{u}(x) = u(x)$ para $x \in \Omega$ e $\tilde{u}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$. Considere a sequência $u_j = \chi_j(\rho_j * \tilde{u})$, em que ρ_j são os Mollifiers definidos em sala de aula e $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $0 \le \chi_j \le 1$ e $\chi_j(x) = 1$ em

$$K_j = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \ge 1/j, \|x\| \le j\}.$$

Mostre que se $U \subset \Omega$ é um aberto tal que $\overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ é compacto, então $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x) = \rho_j * \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x)$, para todo $x \in U$ e j suficientemente grande, em que $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$, para $x \in \Omega$ e $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_k}}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$.
iii. Vimos em aula que $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Use o item i. e o Exercício 22 para mostrar que u é constante. (Use o fato que conhecemos de cálculo: Se $u_j \in C^1(U)$, U aberto e conexo, e $\nabla u_j = 0$, então u_j é constante).

Exercício 23. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo de classe C^1 e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla u = 0$. Use o exercício 23 para provar que $u = 0$.

Exercício 24. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função tal que $\int_\Omega \chi dx = 1$ e $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u dx = 0$. Sabemos que existe uma sequência de funções $u_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tais que $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Defina

$$v_j(x) = u_j(x) - \left(\int_\Omega u_j(y)dy\right)\chi(x).$$

Mostre que $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega v_j(x)dx = 0$ e que $\lim_{j\to\infty} \|v_j - u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Isto mostra que $\tilde{C}_c^\infty(\Omega) = \{u \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\}$ é denso em $\tilde{L}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\}$.

Exercício 25. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^∞. Vimos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e uma sequência de números positivos $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le ...$ tais que $-\Delta e_j = \lambda_j e_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx \ge \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Mostre que a constante λ_1 é a maior constante para a qual a igualdade acima é válida. (É a melhor constante para a qual a desigualdade de Poincaré é válida!)

(Dica: Considere primeiramente $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Use integração por partes e lembre-se que $u = \sum_{j=1}^\infty (u, e_j)e_j$ e $-\Delta u = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j (u, e_j)e_j$).

Exercício 26. i. Mostre que a função $a : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx.$$

é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

ii. Dado $u \in H^1(0,1)$. Suponha que exista $f \in L^2(0,1)$ tal que $a(u,v) = (f,v)_{L^2(0,1)}$, para todo $v \in H^1(0,1)$. Mostre que $u \in H^2(0,1)$, $u(x) - \frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$ e $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0$. Conclua que o operador $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$ associado a função a tem domínio $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(0,1) : \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0\}$ e $Au = u(x) - \frac{d^2u}{dx^2}(x)$, para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.

iii. Use um dos teoremas dado em sala de aula para provar que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $\mathcal{D}(A)$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $-\frac{d^2e_j}{dx^2}(x) = \lambda_j e_j(x)$. Mostre que $e_j \in C^\infty([0,1])$.

iv. Mostre que $\mathcal{B}$ e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dados por $\{1\} \cup \left\{\sqrt{2}\cos(j\pi x) : j \geq 1\right\}$ e $\lambda_j = (j\pi)^2$, para $j \geq 0$, satisfazem as propriedades do item iii. (Note que $\lambda_0 = 0$. O problema de Neumann tem autovalor zero).

Exercício 27. Repita o exercício 27 com $a : H^1_{per}(-1,1) \times H^1_{per}(-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u,v) = \int_{-1}^1 u'(x)v'(x)dx + \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx,$$

em que $H^1_{per}(-1,1) = \{u \in H^1(-1,1) : u(-1) = u(1)\}$. Conclua que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de funções em $C^\infty([-1,1])$ e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $-\frac{d^2e_j}{dx^2}(x) = \lambda_j e_j(x)$, $e_j(-1) = e_j(1)$ e $\frac{de_j}{dx}(-1) = \frac{de_j}{dx}(1)$. Ache as funções e_j.

Exercício 28. Considere o problema abaixo com $u_0 \in L^2(0,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0, x \in [0,1],\\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \quad t > 0,\\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in]0,1[.\end{aligned}$$

i. Mostre que a única solução $u \in C([0,\infty[; L^2(0,1)) \cap C^\infty(]0,\infty[\times[0,1])$ satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |u(t,x)|^2 dx = 0.$$

(A temperatura de uma barra com temperatura zero nas extremidades converge para zero.)

ii. Prove que o mesmo resultado vale para abertos limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^∞.

iii. Mostre que se, ao invés das condições de Dirichlet $u(t,0) = u(t,1)$, tivermos as condições de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$, então

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 |u(t,x) - \int_0^1 u_0(y)dy|^2 dx = 0.$$

(A temperatura de uma barra sem fluxo de calor nas extremidades converge para a média da temperatura inicial.)

Dica para os dois itens acima: Lembre-se que $u(t) = \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t}(u_0, e_j)e_j$.

Exercício 29. Sejam $(H, (.,.)_H)$ e $(V, (.,.)_V)$ espaços de Hilbert. Suponha que H seja separável com dimensão infinita, $V \subset H$ seja denso em H e a inclusão $i : V \to H$ seja compacta.

Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função bilinear, simétrica, contínua e coerciva e $A : \mathcal{D}(A) \to H$ o operador associado a função a. Sabemos que existe uma base $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ de H e uma sequência $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$

de números estritamente positivos, $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=\infty$, tais que $e_j\in\mathcal{D}(A)$ e $Ae_j=\lambda_j e_j$. O espaço $\mathcal{D}(A)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u,v)_{\mathcal{D}(A)}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(u,e_j)_H(v,e_j)_H.$$

i. Mostre que se $u_0\in\mathcal{D}(A)$, então a função $u(t)=\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_H e_j$ satisfaz

$$\lim_{j\to 0}\|u(t)-u_0\|_{\mathcal{D}(A)}=0.$$

ii. Prove que, se $u_0\in\mathcal{D}(A)$, então $u'(t)=-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e^{-\lambda_j t}(u_0,e_j)_H e_j$ está bem definido para $t=0$ e

$$\lim_{h\to 0}\|\frac{u(h)-u(0)}{h}-u'(0)\|_H=0.$$

iii. Conclua que $u\in C([0,\infty[,\mathcal{D}(A))\cap C^1([0,\infty[,H)$. (Dica: Já vimos que $u\in C^\infty(]0,\infty[,\mathcal{D}(A^m))$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Assim, o problema se reduz ao que ocorre em zero).

Exercício 30. Sejam $(H,(.,.)_H)$ e $(V,(.,.)_V)$ espaços de Hilbert tais que $V\subset H$ é denso em H. Seja $a:V\times V\to\mathbb{R}$ uma função bilinear, simétrica e coerciva.

i. Mostre que se $\dim(H)<\infty$, então $V=H$, a inclusão $i:V\to H$ é compacta e $a:V\times V\to\mathbb{R}$ é contínua.

ii. Seja $A:\mathcal{D}(A)\to H$ o operador associado a função a. Mostre que $\mathcal{D}(A)=H$ e que A é um operador autoadjunto positivo. Conclua, usando resultados de álgebra linear, que existe uma base $\mathcal{B}=\{e_j:j\in\{1,...,N\}\}$ ortonormal de H tal que $Ae_j=\lambda_j e_j$ para todo $j\in\{1,...,N\}$.

Exercício 31. Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^∞. Considere o seguinte problema

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)+c(x)u(x)=\lambda u(x),$$

em que a_{ij} e c são funções de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Suponha que exista $a>0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq a\|\xi\|^2$. Mostre que se $c(x)\geq 0$ para todo $x\in\Omega$ e $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ é uma solução não nula do problema acima, então $\lambda>0$.

Exercício 32. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B}=\{e_j:j\in\mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos tais que $\lim_{j\to\infty}\lambda_j=\infty$. Seja $A:\mathcal{D}(A)\to H$ o operador definido como

$$\mathcal{D}(A)=\left\{u\in H:\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2(u,e_j)^2<\infty\right\},$$
$$Au=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,e_j)e_j.$$

Vamos definir o espaço de Hilbert $V=\left\{u\in H:\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,e_j)^2<\infty\right\}$ com produto interno

$$(u,v)_V=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,e_j)(v,e_j).$$

i. Mostre que $V\subset H$ é denso e que a inclusão $i:V\to H$ é contínua. (Pode-se provar que ela é compacta também. Fica o desafio para os interessados).

ii. Mostre que $a:V\times V\to\mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v)=(u,v)_V$$

é bilinear, simétrica, contínua e coerciva.

iii. Seja $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to H$ o operador associado a a, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{A}) &= \{u \in V : \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in V\}, \\ \tilde{A}u &= f. \end{aligned}$$

Mostre que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A})$ e $A = \tilde{A}$.

Exercício 33. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números tais que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$ e $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq ...$ (Note que $\lambda_1 = 0$). Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)^2 < \infty \right\}, \\ Au &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j. \end{aligned}$$

Considere a seguinte equação

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) &= u_0, \\ u'(0) &= u_1, \end{aligned}$$

em que $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2 < \infty \right\}$.

i) Mostre que existe no máximo uma função $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u é solução do problema acima. Para tanto, mostre que, se existir solução, então a solução é da forma

$$u(t) = (u_0, e_1)e_1 + (u_1, e_1)t + \sum_{j=2}^{\infty} \left[(u_0, e_j) \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j) \text{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

Observação: Repetindo o argumento feito em sala de aula, pode-se provar que a expressão acima de fato é solução.

ii) Usando os resultados do exercício 26, ache uma expressão para a solução do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0,1], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in [0,1]. \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= u_1(x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Exercício 34. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, $\mathcal{B} = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de H e $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números estritamente positivos tais que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$. Seja $A : \mathcal{D}(A) \to H$ um operador definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 (u, e_j)^2 < \infty \right\}, \\ Au &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j) e_j. \end{aligned}$$

Considere a seguinte equação

$$\begin{aligned} u''(t) + Au(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) &= 0, \\ u'(0) &= u_1, \end{aligned}$$

em que $u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \Big\{ u \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, e_j)^2 < \infty \Big\}$.

i) Mostre que existe no máximo uma função $u \in C^2(\mathbb{R}; H)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e u é solução do problema acima. Para tanto, mostre que, se existir solução, então a solução é da forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, e_j) \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_j} t) \right] e_j.$$

ii) Mostre que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e calcule $Au(t)$.

iii) Defina $v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_1, e_j) \cos(\sqrt{\lambda_j} t) e_j$. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \|_H = 0$$

e conclua que $u'(t) = v(t)$.