Métrica de Kerr

Esmerindo Bernardes [1]

L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

Instituto de Física de São Carlos

Universidade de São Paulo

5 de junho de 2024

[1]email: sousa@ifsc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Métrica de Kerr

1.1 Coordenadas Boyer-Lindquist

Métrica de Kerr (1963) nas coordenadas (ct, r, θ, ϕ) (Boyer-Lindquist) [1, 2], assinatura $(+---)$:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_s r}{R_s^2} = 1 - \frac{\chi}{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2\theta} \xrightarrow{\alpha\to 0} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{+1}, \tag{1.1}$$

$$g_{11} = -\frac{R_s^2}{R_d^2} = -\frac{\chi^2 + \alpha^2\cos^2\theta}{\chi^2 - \chi + \alpha^2} \xrightarrow{\alpha\to 0} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

$$g_{22} = -R_s^2 = -r_s^2(\chi^2 + \alpha^2\cos^2\theta) \xrightarrow{\alpha\to 0} -r^2, \tag{1.3}$$

$$g_{33} = -\frac{R_f^4}{R_s^2}\sin^2\theta = -r_s^2\sin^2\theta\left[\frac{(\chi^2+\alpha^2)^2 - \alpha^2(\chi^2 - \chi + \alpha^2)\sin^2\theta}{\chi^2 + \alpha^2\cos^2\theta}\right], \tag{1.4}$$

$$g_{33} = -\frac{R_f^4}{R_s^2}\sin^2\theta = -r_s^2\sin^2\theta\left[\chi^2 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2\chi}{\chi^2 + \alpha^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\right] \xrightarrow{\alpha\to 0} -r^2\sin^2\theta, \tag{1.5}$$

$$g_{03} = -\frac{a r_s r}{R_s^2}\sin^2\theta = -r_s\sin^2\theta\frac{\alpha\chi}{\chi^2 + \alpha^2\cos^2\theta} \xrightarrow{a\to 0} 0, \tag{1.6}$$

onde introduzimos três funções auxiliares,

$$R_s^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta = \Sigma, \tag{1.7}$$

$$R_d^2 = r(r - r_s) + a^2 = \Delta, \tag{1.8}$$

$$R_f^4 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 R_d^2 \sin^2\theta, \tag{1.9}$$

e os parâmetros

$$r_s = \frac{2MG}{c^2}, \quad a = \frac{L}{Mc}, \quad \chi = \frac{r}{r_s}, \quad \alpha = \frac{a}{r_s}, \tag{1.10}$$

representam o raio de Schwarzschild (massa) e o momentum angular (fonte), respectivamente. O limite $a \to 0$ (ou $\alpha \to 0$) corresponde à métrica de Schwarzschild. Naturalmente, a métrica de Kerr satisfaz as equações de Einstein sem o termo linear na métrica (onde aparece a famosa constante cosmológica). Essa métrica é estacionária (por não depender explicitamente da coordenada t tipo tempo), mas não é estática (por conter termos mistos envolvendo diferenciais do tipo tempo e do tipo espaço, como $dt\, d\phi$).

Melhor definir a forma como esse ângulo θ é medido. Há duas formas canônicas. Forma I. Uma possibilidade é tomar o eixo de rotação como referência e estabelecer $\theta = 0$ no polo norte e $\theta = \pi$ no polo sul. Com a linha de referência paralela ao eixo de rotação, o equador corresponde a $\theta = \pi/2$. Neste caso, os elementos g_{00} e g_{11} são inversos multiplicativos um do outro nos polos. Forma II. Outra possibilidade é escolher a linha de referência sendo perpendicular ao eixo de rotação, onde $\theta = \pi/2$ é o polo norte e $\theta = -\pi/2$ é o polo sul. Nesta segunda opção, o equador está em $\theta = 0$. Neste caso, os elementos g_{00} e g_{11} são inversos multiplicativos um do outro nos polos.

Em relação à coordenada θ, essa métrica tem duas simetrias discretas: $\theta \to \theta \pm \pi/2$, a qual permite trocarmos senos por cossenos e vice-versa, e $\theta \to \theta \pm \pi$ (trivial, por trocar os sinais de senos e cossenos). Considerando a métrica de Kerr transformada por $\theta \to \theta + \pi/2$, na Forma I (II) de medir o ângulo θ temos $g_{00} g_{11} = 1$ no equador (polo).

1.1.1 Tempo próprio

Mantendo as coordenadas (r, θ, ϕ) constantes, temos

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}\, c^2 dt^2 = \left[1 - \frac{\chi}{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}\right] c^2 dt^2. \tag{1.11}$$

Essa é a métrica ao longo da linha do tempo se $g_{00} > 0$, na qual temos

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\chi}{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2\theta}}\, dt \implies \lim_{\chi\to\infty} d\tau = \lim_{\chi\to 0} d\tau = dt, \tag{1.12}$$

onde τ é o tempo próprio e t é o tempo de um observador distante, pois ambos concordam em seus intervalos somente para r muito maior que r_s ($\chi \to \infty$). Caso $g_{00} < 0$, a curva (r, θ, ϕ) constantes muda para o tipo espaço,

$$d\tau = -\sqrt{\frac{\chi}{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2\theta} - 1}\, dt \implies \lim_{\chi\to\infty} d\tau = \lim_{\chi\to 0} d\tau = -dt. \tag{1.13}$$

Devido à rotação $\alpha \neq 0$, não há mais a singularidade em $\chi = 0$.

Quando $g_{00} = 0$, o tempo próprio congela sua existência, pois um intervalo próprio nulo, $d\tau = 0$, significa que esse relógio leva um tempo infinito para marcar um intervalo num relógio distante. Considerando $g_{00} = 0$, temos

$$\chi(1 - \chi) = \alpha^2 \cos^2\theta, \quad 0 < \chi < 1. \tag{1.14}$$

Como o lado direito é estritamente positivo, então a condição $0 < \chi < 1$ se faz necessária. Esta Eq. (1.14) tem uma solução imediata:

$$\chi = 1, \quad \alpha = 0 \text{ e/ou } \theta = \pi/2, \tag{1.15}$$

a qual pertence à métrica de Schwarzschild. Devido à rotação $\alpha \neq 0$, o tempo próprio deixa de ser percebido como nulo no raio de Schwarzschild ($\chi = 1$).

Tratando θ e α como parâmetros, as duas raízes da Eq. 1.14 são

$$\chi_{\pm}(\theta, \alpha) = \frac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2 \cos^2\theta}\big). \tag{1.16}$$

O valor do momentum angular adimensional $\alpha = 1/2$ é especial,

$$\chi_{\pm}(\theta, 1/2) = \frac{1}{2}\big(1 \pm |\sin\theta|\big). \tag{1.17}$$

No intervalo $\chi \in (\chi_-, \chi_+)$ a coordenada t muda do tipo tempo ($d\tau^2 = g_{00}\, dt^2$) para o tipo espaço ($d\tau^2 = -g_{00}\, dt^2$).

Para $0 \leq \alpha \leq 1/2$, há duas regiões disjuntas formadas pelos valores de χ e θ satisfazendo a Eq. 1.14. Essas duas regiões estão mostradas na Figura 1.1, onde a distância radial adimensional χ é mostrada em coordenadas polares. Cada curva corresponde a um valor de α. A região delimitada pelas duas curvas vermelhas na Figura 1.1 é a região formada por $\chi_+(\theta, \alpha)$. O interior da curva azul é a outra região formada por $\chi_-(\theta, \alpha)$. Há somente dois pontos de contato entre estas duas regiões em $\alpha = 1/2$.

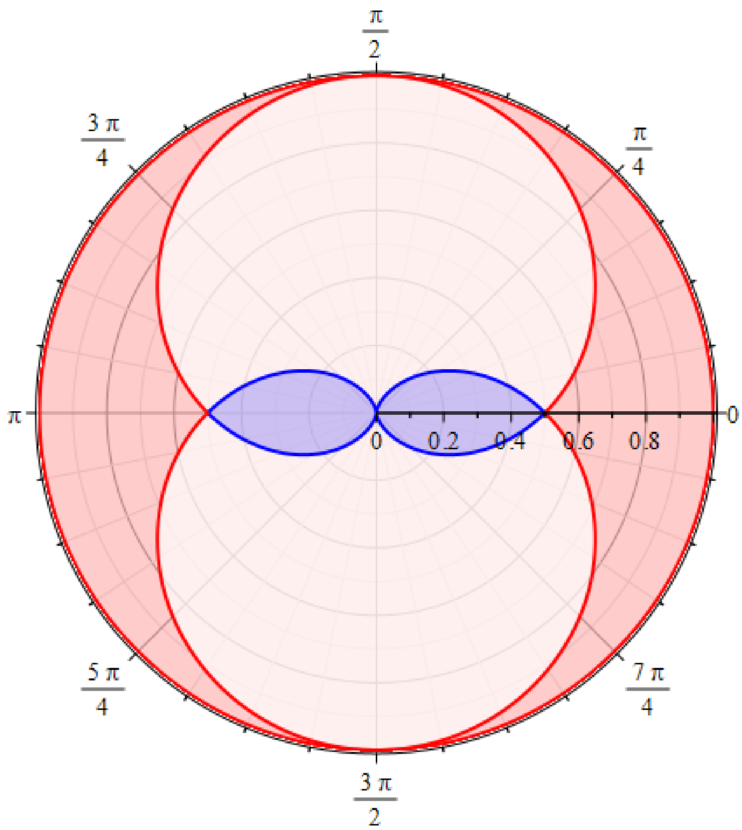
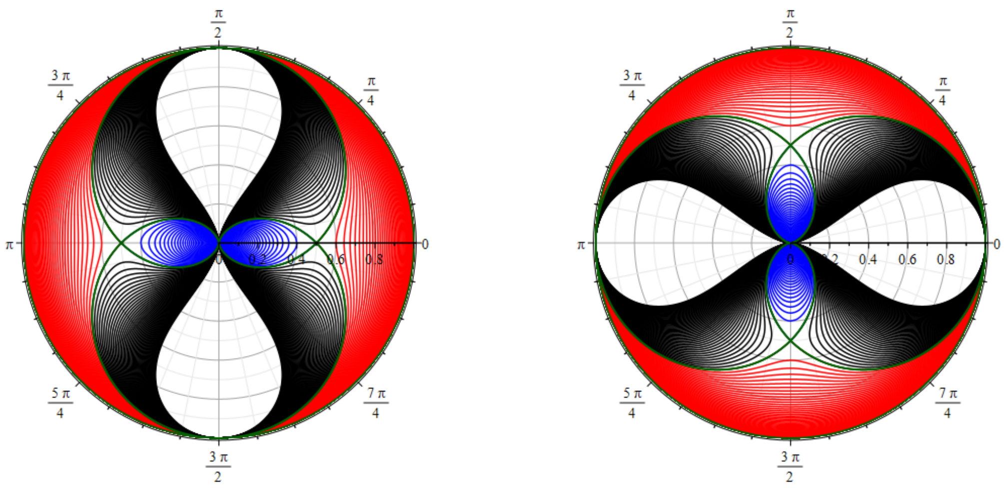


Figura 1.1: Regiões disjuntas formadas pelos valores das distâncias radiais $\chi_+(\theta, \alpha)$ (vermelho) e $\chi_-(\theta, \alpha)$ (azul) para $0 \leq \alpha \leq 1/2$. A fronteira em comum é para $\alpha = 1/2$.

A Figura 1.2 mostra todas as regiões $\chi(\theta, \alpha)$ que são soluções da Eq. 1.14. Note que existe apenas uma região para $\alpha \geq 1/2$, formada pelas curvas $\chi(\theta, \alpha)$ em preto (no intervalo $1/2 \leq \alpha \leq 1$). A fronteira comum a estas três regiões é dada por $\alpha = 1/2$ (curva verde). A Figura 1.2b mostra as mesmas regiões após a transformação $\theta \to \theta + \pi/2$ aplicada à métrica de Kerr, equivalente a trocarmos cossenos por senos e vice-versa.



(a) θ (b) $\theta \to \theta + \pi/2$

Figura 1.2: Regiões disjuntas formadas pelos valores das distâncias radiais $\chi_+(\theta, \alpha)$ (vermelho) e $\chi_-(\theta, \alpha)$ (azul) para $0 \leq \alpha \leq 1/2$. A região formada pelas curvas $\chi(\theta, \alpha)$ em preto corresponde a $\alpha \geq 1/2$.

1.1.2 Distância própria

Mantendo as coordenadas (t, θ, ϕ) constantes, temos

$$ds^2 = g_{11}\, dr^2 = -\frac{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta}{\chi^2 - \chi + \alpha^2} dr^2. \tag{1.18}$$

Desta forma, r pode ser interpretada como uma distância radial vista por um observador distante,

$$ds = \sqrt{\frac{\chi^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta}{\Delta}} dr, \ \Delta = \alpha^2 - \chi(1 - \chi) > 0, \ \lim_{\chi \to \infty} ds = dr. \tag{1.19}$$

As singularidades da métrica (1.19), no sentido algébrico, $\Delta = 0$, estão em

$$\chi_\pm = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{(1 + 2\alpha)(1 - 2\alpha)}\right], \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}. \tag{1.20}$$

No intervalo $\chi \in (\chi_-, \chi_+)$ o denominador Δ em g_{11} é negativo e a coordenada $r = r_s\chi$ muda do tipo espaço ($ds^2 = g_{11}\, dr^2$) para o tipo tempo ($ds^2 = -g_{11}\, dr^2$). A mesma singularidade na métrica de Schwarzschild, $\chi = 1$, vem da raiz χ_+ com $\alpha = 0$. O caso $\alpha = 1/2$ é especial, pois $\chi_+ = \chi_- = 1/2$. Note que as distâncias $\chi_\pm$ em (1.20) concordam com os mesmos valores encontrados em (1.16) no equador após aplicarmos a transformação $\theta \to \theta + \pi/2$, permitida pela métrica de Kerr.

1.1.3 Observações.

Importância da transformação $\theta \to \theta + \pi/2$. Para zerar o tempo próprio:

$$\chi(1-\chi) = \alpha^2 \sin^2\theta, \quad 0 < \chi < 1, \tag{1.21a}$$

$$\chi_\pm(\theta, \alpha) = \frac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2 \sin^2\theta}\big), \quad \alpha \leq \frac{1}{2}. \tag{1.21b}$$

Contém uma régua infinita somente no equador, $\theta = \pi/2$. Restrição em α. Papel da coordenada θ com rotação. Arrastamento do espaço-tempo. Troca de papeis entre régua e relógio.

Referências Bibliográficas

[1] D. J. Reine and E. G. Thomas. *Black Holes: An Introduction*. Imperial College Press, 2010.

[2] V. P. Frolov and A. Zelnikov. *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford Press, 2011.