S T Q Q S S D __/__/__

21/05/2022 - Gabarito P1 - MAP0151

1. A representação binária aproximada de $\sqrt{3}$ é $1,1011b011$, qual é o dígito b que deve aparecer nesta representação? (Justifique)

R.: $\sqrt{3} \approx [1,7320508]_{10} \Rightarrow [1,7320508]_{10} = [b_0 b_1 \dots b_n, b_{n+1} \dots]_2$

· Parte inteira: $[1]_{10} = 1 \cdot 2^0 = [1]_2$

· Parte não inteira: $0,7320508 = b_1/2 + b_2/2^2 + \cdots \Rightarrow$

$2 \cdot 0,7320508 = b_1 + b_2/2 + \cdots \Rightarrow 1 + 0,4641016 = b_1 + b_2/2 + \cdots$
$\Rightarrow b_1 = 1$

$2 \cdot 0,4641016 = 0,9282032 \Rightarrow b_2 = 0$
$2 \cdot 0,9282032 = 1,8564064 \Rightarrow b_3 = 1$
$2 \cdot 0,8564064 = 1,7128128 \Rightarrow b_4 = 1$
$2 \cdot 0,7128128 = 1,4256256 \Rightarrow b_5 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3} \approx [1,10111]_2$

Ou seja $b = 1$, $(= b_5)$.

2. Usando o método de Newton, escreva um esquema numérico para o cálculo de $\sqrt{3}$ e calcule as três primeiras iterações.

R.: $\sqrt{3}$ é raiz positiva de $P(x) = x^2 - 3 \Rightarrow$ tomando $f(x) = x^2 - 3$ como nossa função a ser estudada, temos:

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow 0$ não deve estar no intervalo.

Como $\sqrt{3} > 0$, $\sqrt{3} \in]0, \infty[$. Em $x = 1$, $f(1) = 1^2 - 3 = -2 < 0$, e em $x = 2$, $f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$, logo $f(a)f(b) < 0$, com

$a=1$, $b=2$.

Para um bom chute inicial, queremos $f''(x_0)f(x_0)>0$, $f''(x) = (f'(x))' = 2 > 0 \; \forall x \Rightarrow$ como $f(2) = 1 > 0$, temos $x_0=2$ satisfazendo $f''(x)f(x)>0$.

Pelo método de Newton, temos: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-3}{2x_n}$. Logo, para $x_0=2$, temos as três primeiras iterações como:

- $x_1 = 2 - \dfrac{2^2-3}{2\cdot 2} = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$.

- $x_2 = \dfrac{7}{4} - \dfrac{(7/4)^2-3}{2\cdot(7/4)} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{(49/16)-3}{7/2} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1/16}{7/2} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8\cdot 7} =$
  $= \dfrac{7\cdot 14}{56} - \dfrac{1}{56} = \dfrac{97}{56} = 1{,}7321\overline{428571}$.

- $x_3 = \dfrac{97}{56} - \dfrac{(97/56)^2-3}{2\cdot(97/56)} = \dfrac{97}{56} - \dfrac{97^2/56 - 168}{194} = \dfrac{97}{56} - \dfrac{1/56}{194} =$
  $= \dfrac{97\cdot 194 - 1}{56\cdot 194} = \dfrac{18817}{10864} \approx 1{,}73205081001 47$.

3. Seja $P(x) = x^4+x^3-x^2-2x-2$, verifique que este polinômio tem raiz no intervalo $[1,2]$ e usando o método da dicotomia, ache uma raiz neste intervalo com um erro absoluto máximo de $1/16$.

R.: $P(x)$ é polinômio $\Rightarrow P(x) \in C^{\infty}$, logo, contínua. $P(1) =$ $= 1^4+1^3-1^2-2\cdot 1-2 = -3$ e $P(2) = 2^4+2^3-2^2-2\cdot 2-2 = 14$, e, para $P'(x)$ que é: $4x^3+3x^2-2x-2$ temos $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3+3x^2-2x-2=0$

Chamando $f(x) = 4x^3+3x^2-2x-2 \Rightarrow f \in C^\infty$ por polinômio

$f(0)=4\cdot0^3+3\cdot0^2-2\cdot0-2=-2$ e $f(1)=4\cdot1^3+3\cdot1^2-2\cdot1-2=3$ e $f'(x)$, que é $12x^2+6x-2$, $=0 \Leftrightarrow 12x^2+6x-2=0$, ou seja:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot12\cdot(-2)}}{2\cdot12} = \frac{-6\pm\sqrt{60}}{24} = \frac{-1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{12} \begin{cases} \approx 0{,}07275 \\ \approx -0{,}57275 \end{cases}$$

$f(0{,}5)=4\cdot(0{,}5)^3+3\cdot(0{,}5)^2-2\cdot0{,}5-2=-1{,}75 \Rightarrow$ hipóteses verificadas para aplicar o método de Newton $\Rightarrow (\alpha \in [0{,}5;1]$ e $x_0=0{,}75)$

$$x_1 = 0{,}75 - \frac{4\cdot(0{,}75)^3+3(0{,}75)^2-2\cdot(0{,}75)-2}{12\cdot(0{,}75)^2+6\cdot(0{,}75)-2} = 0{,}75 + \frac{1{,}375}{9{,}25} = \underline{0{,}898\overline{648}},$$

$$x_2 = 0{,}8986486 - \frac{4\cdot(0{,}8986486)^3+3(0{,}8986486)^2-2(0{,}8986486)-2}{12(0{,}8986486)^2+6(0{,}8986486)-2} =$$

$$= 0{,}8986486 - (1{,}5282955/13{,}0827233) \approx \underline{0{,}781830},$$

$$x_3 = 0{,}781830 - \frac{4(0{,}781830)^3+3(0{,}781830)^2-2(0{,}781830)-2}{12(0{,}781830)^2+6(0{,}781830)-2} =$$

$$= 0{,}781830 - (0{,}181722/10{,}026078) \approx \underline{0{,}763705},$$

Escolhendo a terceira iteração, temos 0,763705 como aproximação da raiz de $4x^3+3x^2-2x-2$, tal que $\alpha \in [0{,}5;1]$

$\Rightarrow$ Como $0{,}763705 \notin [1,2]$ (, e nem vai pertencer, pois o erro entre as iterações reduz a cada iteração e a sequência das iterações converge para a raiz), temos que $\exists!\, \alpha \in [1,2] : P(\alpha)=0$ pelo teorema do valor intermediário.

Logo podemos aplicar o método do ponto mid:

a	1	1	1,25	1,375	1,375
b	2	1,5	1,5	1,5	1,4375
x_m	1,5	1,25	1,375	1,4375	1,40625
$f(x_m)$	1,1875	-1,6680	-0,46665	0,2991	-0,09846
erro	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32

=> 1,40625 é aproximação de α com erro menor que 1/16

4. Use o algoritmo de Hörner para encontrar a divisão do polinômio P(x) acima por $(x-2)$.

R.: Como o algoritmo de Hörner busca P(x) genérico na forma: $P(x) = q(x)(x-x_0) + P(x_0)$, e queremos a divisão de $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ por $x-2$, podemos entender 2 como nosso x_0, logo:

$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = q(x)(x-2) + P(2)$ =>

p	1	1	-1	-2	-2
x_0	2	2	2	2	
b	1	3	5	8	14

$\Rightarrow P(x) = (x^3 + 3x^2 + 5x + 8)(x-2) + 14$

S T Q Q S S D __/__/__

5. Ache a decomposição PLU da matriz: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

R.: Queremos P, L e U matrizes tais que: $P \cdot A = L \cdot U$

=> Podem ser encontradas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U & L & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cdot U: L_2' = L_2 - (2/-2)L_1 \\ \cdot m_{ij} = a_{ij}/a_{jj} \Rightarrow \\ m_{21} = 2/-2 \text{ e } m_{31} = 0/-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_1 & P \cdot L_1 \cdot P & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cdot U_1: L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_2 & P_1 \cdot L_1 \cdot P_1 & P_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \cdot U_2: L_3' = L_3 - (-1/-2)L_2 \\ \cdot m_{32} = -1/-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_3 & P_1 \cdot L_2 \cdot P_1 & P_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} //$$

Scanned with CamScanner

Verificação:

$$P \cdot A = L \cdot U \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ válida.}$$

6. Para quais valores de x teremos o critério de Sassenfeld satisfeito para a matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 0{,}5 \end{bmatrix}$

R.: Pelo critério de Sassenfeld, para $A = (a_{ij})$, $\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j / |a_{ii}|\right) + \left(\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| / |a_{ii}|\right)$. Se $\beta = \max\{\beta_i\} < 1$, $i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow$ vale o método de Gauss-Seidel.

Logo, para A do enunciado, temos:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} = \frac{|1|}{|2|} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} \cdot \beta_1 = \frac{|x|}{|0{,}5|} \cdot \frac{1}{2} = |x|$$

$\Rightarrow \beta = \max_{1 \le i \le n} \{\beta_i\} < 1 \iff \max\{1/2, |x|\} < 1$. Ou seja, $\iff$

$|x| < 1$. Se $|x| < 1/2$, $\beta = 1/2$ que é < 1. #

S T Q Q S S D ___/___/___

Resolução alternativa à questão 1:

Desenvolvendo $(1,10111)^2$ teremos que:
Se > 3 temos que devemos retirar o último digito.
Se < 1, b será o último digito por estar na base 2.

$$
\begin{array}{r}
1,10111 \\
\times 1,10111 \\
\hline
110111 \\
110111+ \\
110111+ \\
000000+ \\
110111+ \\
110111+ \\
\hline
10,1111010001
\end{array}
< 11 = [3]_2 \Rightarrow b = 1
$$