(8) d) Sabemos que podemos utilizar a aproximação

$$\hat{p}_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \hat{p}_n - p \sim N\left(0, \frac{p(1-p)}{n}\right) \quad (1)$$

O erro $e = \hat{p}_n - p$ é ótimo quando ele estiver o mais próximo possível de 0 com alta probabilidade, ou seja,

$$1 - \alpha = P(|\hat{p}_n - p| < \varepsilon), \text{ para } \alpha \in (0,1) \text{ e } \varepsilon > 0.$$

Por (1) temos

$$1 - \alpha = P(-\varepsilon < \hat{p}_n - p < \varepsilon) = P\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} < Z < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right); \; Z \sim N(0,1)$$

Para dado $\alpha \in (0,1)$, podemos encontrar o quantil z_α tal que $z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} > 0$. Agora note que minimizar z_α gera uma distribuição mais concentrada em torno de 0.

Olhando $z_\alpha = z_\alpha(p)$ como função de $p \in (0,1)$, vemos que o valor de p que minimiza $z_\alpha(p)$ é $p = 1/2$ para qualquer $\alpha \in (0,1)$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Lista 2

12- $X_1, \ldots, X_n$ aa tais que $X_i \sim Bernoulli(p)$.

$$X = \sum_1^n X_i \sim Binomial(n, p)$$

(i) $\hat{p}_1 = \frac{X}{n}$ $\begin{cases} E(\hat{p}_1) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{\cancel{n}p}{\cancel{n}} = p \\ Var(\hat{p}_1) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(X) = \frac{\cancel{n}p(1-p)}{n^{\cancel{2}}} = \frac{p(1-p)}{n} \end{cases}$

(ii) $\hat{p}_2 = \begin{cases} 1, \text{ se } X_1 = 1 \\ 0, \text{ se } X_1 = 0 \end{cases}$, logo $\hat{p}_2 = X_1 \sim Bernoulli(p)$

$E(\hat{p}_2) = p$ e $Var(\hat{p}_2) = p(1-p)$.

Note que, $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow Var(\hat{p}_1) = \frac{p(1-p)}{n} \leq p(1-p) = Var(\hat{p}_2)$

Portanto o estimador $\hat{p}_2$ é inadmissível.

São Consistentes?

(i) $\hat{p}_1$. Para n grande, temos $\hat{p}_1 \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ e

logo,
$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

$$P(|\hat{p}_1 - p| > \varepsilon) = 1 - P(|\hat{p}_1 - p| \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - P\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

Daí,

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{p}_1 - p| > \varepsilon) = 1 - \lim_{n \to \infty} \underbrace{P\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)}_{1} = 0$$

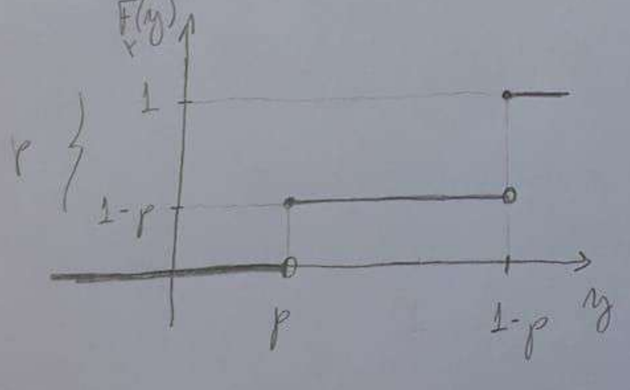
(ii) $\hat{p}_2$

Primeiro note que $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon) = P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon)$, pois $\hat{p}_2$ não depende de n. Logo $\hat{p}_2$ será consistente se, e somente se, $P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall p \in (0, 1)$.

Agora veja que

$$Y = |\hat{p}_2 - p| = \begin{cases} p, & \text{se } \hat{p}_2 = 0 \\ 1-p, & \text{se } \hat{p}_2 = 1 \end{cases}, \quad \text{logo} \quad \begin{cases} P(Y = 1-p) = p \\ P(Y = p) = 1-p \end{cases}$$

Assim o gráfico da cumulada de Y é da forma



Veja também que

$$P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon) = P(Y > \varepsilon) = 1 - P(Y \leq \varepsilon).$$

Logo, $P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon) = 0 \iff 1 = P(Y \leq \varepsilon) = F_Y(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$.

Absurdo, pois $1 > 1-p = F_Y(\varepsilon)$ para $\varepsilon \in (p, 1-p)$.

Portanto $\hat{p}_2$ não é consistente.