Teoria dos Grupos - SFI 5823

Trabalho I - 17/05/2022

Entrega: 24/05/2022

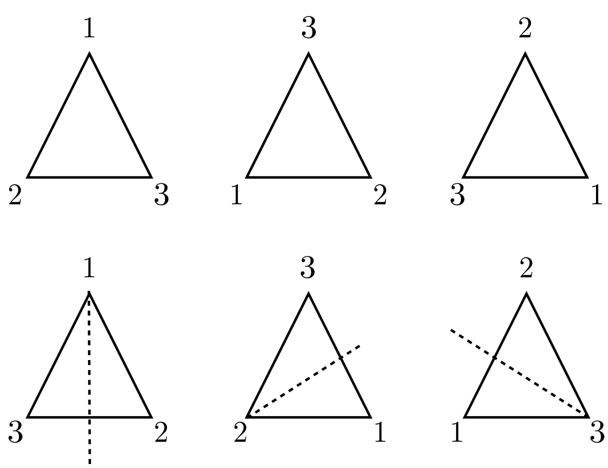
1. **(2,0)** Considere as transformações (rotações e reflexões) que deixam um triângulo equilátero invariante, conforme mostrado na figura abaixo.

   (a) Mostre que tais transformações formam um grupo e determine sua estrutura (tabela de multiplicação ou isomorfismo a um grupo conhecido).

   (b) Calcule as matrizes de uma representação de dimensão 3 deste grupo baseada nas transformações do triângulo.

   (c) Calcule os caracters dos elementos deste grupo nesta representação.

   (d) Tal representação é irredutível?



2. **(2,0)** Considere o grupo simétrico S_4 das permutações de quatro objetos, que tem $4! = 24$ elementos e responda às seguintes questões: (dica: estude o que foi feito para o grupo simétrico S_3 nos exemplos 1.23 e 1.25 da apostila (versão 2000))

   (a) Construa uma representação de dimensão 4 para S_4, que permuta quatro objetos, como por exemplo os elementos da base canônica do espaço vetorial da representação.

   (b) Mostre que esta representação é redutível, e determine as componentes irredutíveis, suas dimensões e bases para os subespaços invariantes.

(c) Considere a componente irredutível de maior dimensão obtida no item anterior e construa uma representação de S_4 que é o produto tensorial desta representação com ela mesma. Mostre que a representação obtida é redutível e determine as componentes irredutíveis, suas dimensões e bases para os subespaços invariantes.

(d) Construa todas as representações irredutíveis inequivalentes de S_4.

3. **(2,0)** Considere a álgebra do grupo de Lie $SO(6)$ de rotações em um espaço de 6 dimensões Euclideanas, i.e. $\mathbb{R}^6$. Este grupo deixa invariante o produto escalar de vetores reais em $\mathbb{R}^6$, e portanto ele é um grupo de matrizes 6×6 ortogonais, e sua álgebra de Lie é aquela das matrizes reais anti-simétricas 6×6.

   (a) Qual a dimensão da álgebra de Lie de $SO(6)$?

   (b) Determine a forma traço de $SO(6)$ nesta representação matricial 6×6. Quais são os auto-valores desta forma traço?

   (c) Construa uma base para uma sub-álgebra de Cartan da álgebra de Lie de $SO(6)$ em termos daquelas matrizes 6×6. Qual sua dimensão, e portanto qual é o rank de $SO(6)$?

   (d) Considerando a complexificação da álgebra de Lie de $SO(6)$, encontre a raízes de $SO(6)$ e os respectivos operadores step em termos daquelas matrizes 6×6.

   (e) Determine os valores de ângulos e razões de comprimentos quadrado das raízes de $SO(6)$.

   (f) A partir da estrutura do sistemas de raízes de $SO(6)$ determine se sua álgebra de Lie é simples ou não.

4. **(2,0)** A chamada álgebra do momento angular é a álgebra de Lie do grupo de rotações $SO(3)$ em três dimensões Euclideanas. Denotando por J_i, $i = 1, 2, 3$, as três componentes do momento angular, as relações de comutação são

$$[J_i\, ,\, J_j] = i\, \varepsilon_{ijk}\, J_k\ ; \qquad\qquad i\, ,\, j\, ,\, k = 1, 2, 3$$

onde $\varepsilon_{123} = 1$, e ε_{ijk} é totalmente anti-simétrico. Considere agora um sistema físico cuja energia é dada pelo quantidade

$$H = \mu^2\, \left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\right] + \lambda\, J_3$$

Sob rotações espacias as componentes do momento angular transformam pela representação adjunta de $SO(3)$, i.e. a representação tripleto

$$J_i \to \bar{J}_i = J_j \, d_{ji}(g) \; ; \qquad\qquad d(g)\, d(g') = d(g\, g')$$

onde $g\,,\, g' \in SO(3)$. Sabe-se que os estados deste sistema físico formam uma representação de $SO(3)$ infinita completamente redutível onde cada uma das infinitas representações irredutíveis finitas de $SO(3)$ aparece uma única vez. Responda:

(a) Qual o grupo de simetria de H para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$?

(b) Qual o grupo de simetria de H para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda \neq 0$?

(c) Determine as energias dos estados deste sistema físico para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$. Qual o estado de menor energia neste caso?

(d) Determine as energias dos estados deste sistema físico para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda \neq 0$.

(e) Para o caso $\mu^2 = \lambda = 1$, qual a energia do estado de menor energia? E a energia do estado com o segundo menor valor de energia (primeiro estado excitado)?

(f) Para o caso $\mu^2 = 1$ qual o menor valor positivo de λ para que o estado de menor energia seja duplamente degenerado?

(g) É possível existir degenerescência para algum valor de energia, no caso em que $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$?

5. **(2,0)** O grupo Euclideano em $\mathbb{R}^3$ é o grupo formado pelas rotações e translações. Denotando por x_i, $i = 1, 2, 3$, as coordenadas Cartesianas em $\mathbb{R}^3$, as tranformações deste grupo são dadas por

$$\text{rotações:} \qquad x_i \to x'_i = R_{ij}\, x_j \qquad R^T R = R\, R^T = \mathbb{1}$$

$$\text{translações:} \qquad x_i \to x'_i = x_i + a_i$$

Portanto, estamos definindo este grupo através de uma representação matricial de dimensão 3.

(a) Calcule as matrizes da álgebra de Lie do grupo Euclideano em $\mathbb{R}^3$ nesta representação tridimensional.

(b) Utilizando esta representação matricial calcule as relações de comutação desta álgebra.

(c) Esta álgebra é semi-simples. Se não, qual é a sub-álgebra invariante? Ela é abeliana?

(d) Calcule a forma traço desta álgebra na representação tridimensional construída acima.

(e) Calcule a forma de Killing desta álgebra. Ela é degenerada ou não?

(f) Encontre uma sub-álgebra de Cartan da álgebra do grupo Euclideano em $\mathbb{R}^3$, e uma base de matrizes para ela?