Lista de Exercício II

1. Prove as relações

$$\exp(L)\, T \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad_L^n T$$

e

$$(\partial \exp(L))\; \exp(-L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} ad_L^n \partial L$$

onde $ad_L T$ é a ação adjunta de L

$$ad_L T = [L\, ,\, T]$$

2. Seja V uma álgebra associativa, i.e. para $a, b \in V$ então $a \cdot b \in V$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Mostre então que V com a operação

$$[a\, ,\, b] \equiv a \cdot b - b \cdot a$$

é uma álgebra de Lie.

3. Na seção 2.5 da apostila nós estudamos as representações espinoriais de $su(2)$ e $sl(2)$, i.e. as matrizes (2.57) e (2.77) respectivamente. Mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores T_i, $i = 1, 2, 3$, dados por (2.57), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo compacto. Isto é, mostre que estas matrizes são funções periódicas dos parâmetros reais usados na exponenciação. Por outro lado, mostre que a exponenciação de uma combinação linear dos geradores L_i, $i = 1, 2, 3$, dados por (2.77), com coeficientes reais, produz matrizes 2×2 que correspondem a elementos de um grupo não compacto.

4. Tome o espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas Cartesianas x_i, $i = 1, 2, 3$, e considere as rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em cada um dos 3 planos $(x_1\, x_2)$, $(x_3\, x_1)$, e $(x_2\, x_3)$. Se denotarmos os vetores de $\mathbb{R}^3$ por matrizes colunas

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

então as matrizes daquelas rotações nesta representação de dimensão 3, são dadas por

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Defina um grupo G como aquele gerado livremente por todas as composições possíveis destas tres rotações.

   (a) Construa todos os elementos de G. Qual a ordem de G?

   (b) Determine se G tem ou não subgrupos invariantes.

(c) Construa a representação matricial para este grupo, onde o espaço da representação é o próprio $\mathbb{R}^3$.

(d) Calcule os caráters dos elementos do grupo nesta representação.

(e) Esta representação é irredutível? Justifique.

5. O grupo $SU(4)$ é o grupo das matrizes 4×4, complexas, unitárias, e de determinante igual a 1. Escrevendo os elementos próximos à identidade pelo mapeamento exponencial como $g = e^{iT}$, vemos que os elementos T da álgebra de Lie de $SU(4)$ são matrizes 4×4, complexas, hermitianas e de traço nulo.

   (a) Mostre que a dimensão de $SU(4)$ é 15.

   (b) Construa uma base para a álgebra de Lie de $SU(4)$ em termos de matrizes 4×4, hermitianas e de traço nulo, e que são ortogonais.

   (c) Escolha uma subalgebra de Cartan dentre estas matrizes.

   (d) Tomando combinações lineares complexas das matrizes, construa os operadoes step de $SU(4)$ e calcule as raízes desta álgebra.

   (e) Verifique que estas raízes satisfazem os postulados de uma diagrama de raízes.

6. Considere uma representação matricial (finita) $R(T)$ de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, i.e.

$$[\,R(T)\,,\, R(T')\,] = R([\,T\,,\,T'\,]) \qquad\qquad T\,,\,T' \in \mathcal{G}$$

   Considere um conjunto de operadores de criação e aniquilação em número igual à dimensão da representação R,

$$[\,a_i\,,\,a_j\,] = 0 \qquad \left[\,a_i^\dagger\,,\,a_j^\dagger\,\right] = 0 \qquad \left[\,a_i\,,\,a_j^\dagger\,\right] = \delta_{ij} \qquad\qquad i,j = 1,\ldots \dim R$$

   Mostre que os operadores

$$S(T) \equiv \sum_{i,j} a_i^\dagger R_{ij}(T)\, a_j$$

   constituem uma representação de $\mathcal{G}$, i.e.

$$[\,S(T)\,,\,S(T')\,] = S([\,T\,,\,T'\,])$$

7. Considere a álgebra $sl(2)$ com relações de comutação

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm\;; \qquad [T_+, T_-] = 2T_3$$

   Calcule os operadores $S(T_{3,\pm})$ (do exercício anterior) para o caso da representação bidimensional (espinorial) desta álgebra. Mostre que realizando os operadores de criação e aniquilação como

$$a_i \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \qquad\qquad a_i^\dagger = \lambda_i$$

obtemos a representação em termos dos seguintes operadores diferenciais ($\lambda_1 \equiv \lambda$ e $\lambda_2 \equiv \bar{\lambda}$)

$$S(T_+) \equiv \lambda \frac{d}{d\bar{\lambda}}\;; \qquad S(T_-) \equiv \bar{\lambda} \frac{d}{d\lambda}\;; \qquad S(T_3) \equiv \frac{1}{2}\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda}\frac{d}{d\bar{\lambda}}\right)$$

Calcule a ação dos operadores $S(T_{3,\pm})$ nos estados $\lambda^p\,\bar{\lambda}^q$. Quais são as representações irredutíveis?

8. Verifique se as duas subálgebras (de dimensão 1) de $sl(2)$ geradas por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são subálgebras de Cartan.

9. Verifique se a subálgebra (de dimensão 2) de $sl(3)$ gerada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma subálgebra de Cartan.

10. O diagrama de raízes da álgebra $so(5)$ está dado na figura 2.9, página 79, da apostila. Verifique qual é a estrutura do grupo de Weyl de $so(5)$.

11. Defina um vetor δ no espaço de raízes como

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$$

Mostre que se α é uma raíz simples então

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

e portanto

$$\frac{2\delta\cdot\alpha}{\alpha^2} = 1 \qquad \text{para } \alpha \text{ simples}$$

12. Calcule o sistema de raízes e as relações de comutação de $SO(5)$ a partir de seu diagrama de Dynkin (veja figura 2.9, página 79, da apostila). Mostre como fazer uma escolha consistente dos cociclos $\varepsilon(\alpha,\beta)$.

13. A classificação dos diagramas de Dynkin é feita provando-se ser impossível a existência de vários tipos de diagramas. Neste contexto:

   (a) Mostre que um diagrama de Dynkin não possue loops
   (b) Mostre que o número de linhas conectadas a um dado ponto não pode exceder 3