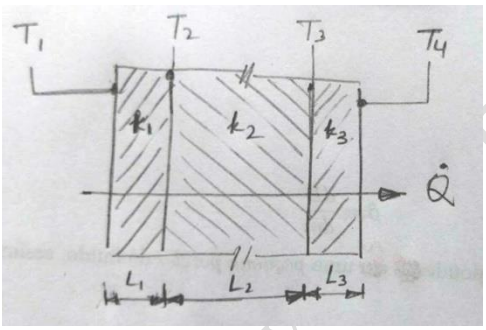
AULA 4 – PAREDES PLANAS COMPOSTAS

Condução unidimensional, regime permanente, sem geração de calor – paredes compostas.

Às vezes a parede é composta por várias camadas de diferentes materiais como, por exemplo, a parede de uma casa. A figura seguinte mostra esquematicamente uma parede plana composta por três materiais distintos.



Para resolver de forma rápida e simples este problema, note que o fluxo de calor q é o mesmo que atravessa todas as paredes. Assim, para cada parede pode-se escrever as seguintes equações:

- parede 1: $\dot{Q} = k_1 A \dfrac{(T_1 - T_2)}{L_1} \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \dfrac{\dot{Q} L_1}{k_1 A}$

- parede 2: $\dot{Q} = k_2 A \dfrac{(T_2 - T_3)}{L_2} \Rightarrow \quad T_2 - T_3 = \dfrac{\dot{Q} L_2}{k_2 A}$

- parede 3: $\dot{Q} = k_3 A \dfrac{(T_3 - T_4)}{L_3} \Rightarrow \quad T_3 - T_4 = \dfrac{\dot{Q} L_3}{k_3 A}$

Assim, somando os termos de todas as paredes:

$$T_1 - T_4 = \dot{Q} \sum \frac{L_i}{k_i A} = q \sum \frac{L_i}{k_i}$$

ou, simplesmente,

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}}$$

onde, ΔT refere-se à diferença total de temperaturas da duas faces externas e R é a resistência térmica da parede composta, dada por $R = \sum \frac{L_i}{k_i A}$

ANALOGIA ELÉTRICA

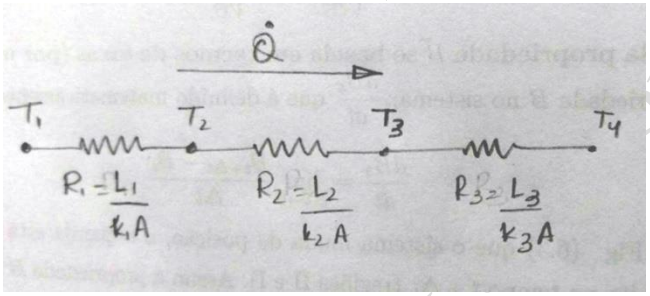
Nota-se que existe uma analogia elétrica perfeita entre fenômenos elétricos e térmicos de condução de calor, fazendo a seguinte correspondência:

$$i \rightarrow \dot{Q}$$

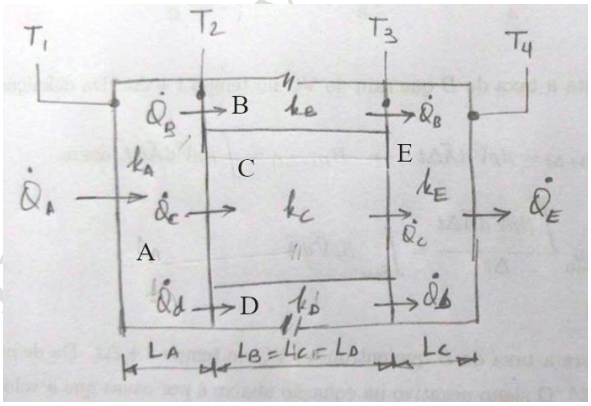
$$U \rightarrow \Delta T$$

$$R_{ÔHMICO} \rightarrow R_{TÉRMICO}$$

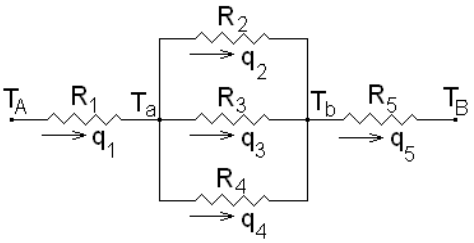
q ⟶



Por meio de analogia elétrica, configurações mais complexas (em série e paralelo) de paredes podem ser resolvidas.



Circuito elétrico equivalente



Fluxo de calor que é:

$$\dot{Q} = qA = \frac{\Delta T_{total}}{R_T}$$

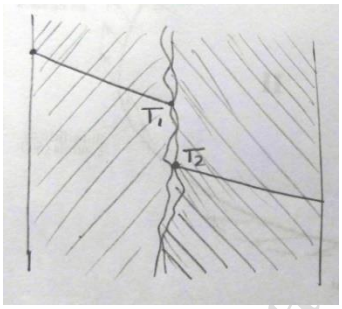
$$R_T = R_1 + R_{//} + R_5$$

com

$$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Resistência térmica de contato

Quando as superfícies de dois sólidos são colocadas em contato para formar uma parede composta, a região interfacial entre eles pode ter uma resistência térmica de contato, $R''_{t,C}$, devido ao fato de que não existe uma contato "perfeito" entre as duas superfícies, como ilustrado abaixo, devido à rugosidade superficial. A transferência de calor se dará por condução nos pontos de contato dos picos das rugosidades e pela condução através do fluido que preenche o espaço entre as superfícies. Radiação térmica também pode estar presente.



A transferência de calor na interface, entre as superfícies sólidas é: $\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{T_1 - T_2}{R''_{t,c}/A}$, assim a resistência térmica de contato é dada pela seguinte equação,

$$R''_{t,c} = \frac{T_1 - T_2}{q}$$

A resistência térmica varia com os materiais envolvidos e com a pressão entre superfícies, alguns valores estão indicados na tabela a seguir.

Resistência térmica na interface entre sólidos.

Interface	$R''_{t,c}$ (m^2K/W)
Latão/latão com inserção de 15 μm de solda de estanho a 1-10 MPa (Yoyanovich e Tuarze, 1969)	$0{,}025\times10^{-4}$ - $0{,}14\times10^{-4}$
Cobre/alumínio com inserção de graxa eupec (Henton) (Sartre e Lallemand, 2001)	$1{,}47\times10^{-4}$
Cobre/alumínio com inserção de folha de grafite (Furon C695) (Sartre e Lallemand, 2001)	$6{,}25\times10^{-4}$
Cobre/alumínio com inserção de folha de silicone com oxido de alumínio (Therm 1674) (Sartre e Lallemand, 2001)	$8{,}01\times10^{-4}$

CONDUÇÃO EM PLACA PLANA COM GERAÇÃO INTERNA DE ENERGIA TÉRMICA (CALOR)

Geração interna de energia térmica (calor) pode resultar da conversão de uma forma de energia em calor.

Exemplos de formas de energia convertidas em calor:

1. Geração de calor devido à conversão de energia elétrica em calor (efeito Joule)

$$P = RI^2 \qquad \text{(W)}$$

Onde: P : potência elétrica transformada em fluxo de calor por efeito Joule (W)
R : resistência ôhmica (Ω)
I : corrente elétrica (A)

Ainda, U : diferença de potencial elétrico (V)

$$P = UI \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{U^2}{R}$$

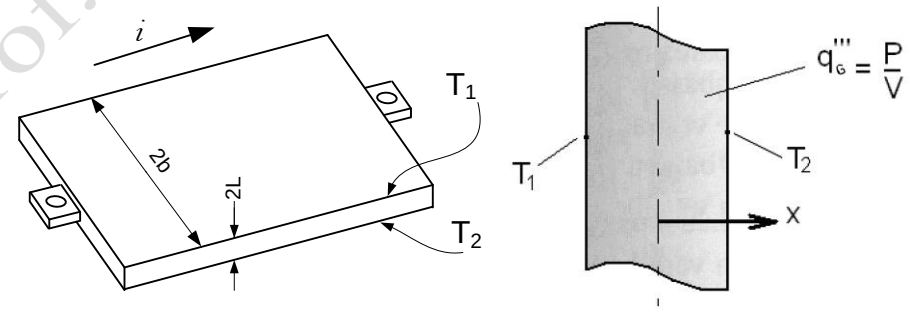
Em termos volumétricos, $q_G'''\ (W/m^3)$, $q_G''' = \dfrac{P}{V}$ (W/m^3), onde V : volume onde o calor é gerado.

2. Geração de energia térmica (calor) devido a uma reação química exotérmica $(q_G''' > 0)$ como, por exemplo, o calor liberado durante a cura de resinas e concreto. Já, no caso de uma reação endotérmica, $q_G''' < 0$.

3. Outras formas tais de geração de calor devido à absorção de radiação, nêutrons, etc...
Parede (placa) plana com geração de calor uniforme (resistência elétrica plana).

Esse é o caso de resistências elétricas planas.

$b >> L$



prof. Simões - www.usp.br/sisea

Equação geral

$$\nabla^2 T + \frac{q_G'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \text{sendo que} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \ \text{(regime permanente)}$$

$$\nabla^2 T + \frac{q_G'''}{k} = 0 \qquad T = T(x)$$

Condições de contorno:

(1) $x = -L \qquad T = T_1$

(2) $x = L \qquad T = T_2$

Solução

Seja a seguinte mudança de variável (apenas por conveniência): $\theta = \frac{dT}{dx}$,

Então $\frac{d\theta}{dx} = \frac{-q_G'''}{k}$

Integrando essa equação por partes, vem:

$$\int d\theta = \int \frac{-q_G'''}{k} dx + C_1 \text{, mas como } \theta = \frac{dT}{dx}, \text{ então} \qquad \frac{dT}{dx} = -\frac{q_G'''}{k} x + C_1$$

Integrando novamente:

$$\boxed{T(x) = \frac{-q_G''' x^2}{2k} + C_1 x + C_2}$$

Obs.: Trata-se de uma distribuição parabólica de temperaturas.

- Como no caso da resistência elétrica q_G''' (geração de calor) é positivo e, claro, k também é positiva, a constante que multiplica o termo x^2 é negativa $\Rightarrow$ parábola com a concavidade voltada para baixo. Por outro lado, se q_G''' for negativo, o que pode ocorrer com processos de curas de algumas resinas (processos endotérmicos), então a concavidade será voltada para cima.

Determinação das constantes C_1 e C_2:

Condições de contorno

(1) $T_1 = -\frac{q_G''' L^2}{2k} - C_1 L + C_2$ - temperatura da face esquerda conhecida

prof. Simões - www.usp.br/sisea

(2) $T_2 = -\frac{q_G''' L^2}{2k} + C_1 L + C_2$ - temperatura da face direita conhecida

Somando (1)+(2), vem:

$$T_1 + T_2 = \frac{-q_G''' L^2}{k} + 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{q_G''' L^2}{2k}.$$

Substituindo em (1) ou (2), tem-se $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{2L}$

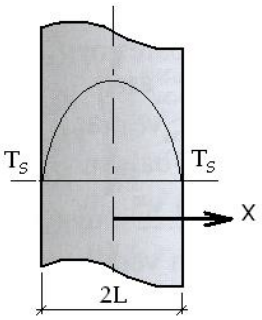
Então, a distribuição final de temperaturas é:

$$\boxed{T(x) = \frac{q_G'''(L^2 - x^2)}{2k} + (T_2 - T_1)\frac{x}{2L} + \frac{T_1 + T_2}{2}}$$

- ***CASOS:***

(A) Suponha que as duas faces estejam à mesma temperatura: $T_1 = T_2 = T_S$. Daí, resulta que:

$$\boxed{T(x) = \frac{q_G'''(L^2 - x^2)}{2k} + T_S}$$



É uma distribuição simétrica de temperaturas. A máxima temperatura, nesse caso, ocorre no plano central, onde $x = 0$ (note a simetria do problema). Se for o caso pouco comum de uma reação endotérmica, ou $q_G''' < 0$, a concavidade seria voltada para abaixo e, no plano central, haveria a mínima temperatura.

Também poderia se chegar a essa expressão usando $\frac{dT}{dx} = 0$

$$T_{MÁX} = T_C = \frac{q_G''' L^2}{2k} + T_S$$

Taxa de calor e fluxo de calor (lei de Fourier)

$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dx}$ ou, taxa total de calor,

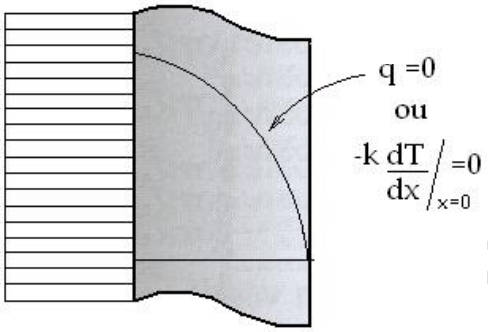
$q = \frac{\dot{Q}}{A} = -k\frac{dT}{dx}$, fluxo de calor. Substituindo a distribuição de temperaturas, vem:

prof. Simões www..usp.br/sisea

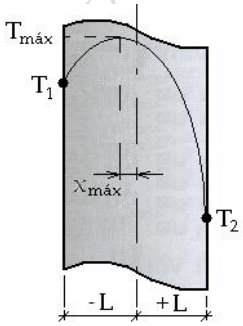
$$q = -k\frac{d}{dx}\left[\frac{q_G'''(L^2 - x^2)}{2k} + T_S\right] = xq_G''' ,$$

No plano central (x = 0) o fluxo de calor é nulo devido à simetria do problema e das condições de contorno.

Dessa forma, o plano central age como o caso de uma parede adiabática, $q'' = 0$



(B) Nesse caso, suponha que a temperatura de uma das faces seja maior: Por exemplo, $T_1 > T_2$ **,** como ilustrado abaixo a seguir.



Plano em que ocorre a máxima temperatura, $T_{máx}$ **(** $x_{máx}$ **)**

Sabemos que o fluxo de calor é nulo em $x_{máx}$ **:**

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x_{máx}} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{q_G'''}{2k}(L^2 - x^2) + (T_2 - T_1)\frac{x}{2L} + \frac{T_1 + T_2}{2}\right] = 0 , \text{ que resulta em:}$$

$$-\frac{q_G'''}{k}x_{máx} + \frac{(T_2 - T_1)}{2L} = 0$$

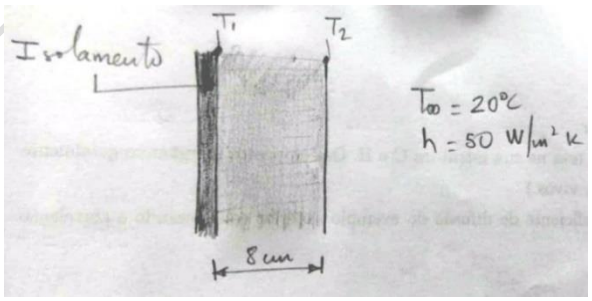
Cuja solução é: $$x_{máx} = \frac{(T_2 - T_1)k}{2Lq'''_G}$$

Substituindo-se o valor de $x_{máx}$ na expressão da distribuição da temperatura, encontra-se o valor da máxima temperatura $T_{máx}$. Tente fazer isso!

PENSE: Suponha que você é um engenheiro-perito e é chamado para dar um parecer sobre um incêndio com suspeita de ter origem no sobreaquecimento do sistema elétrico. Como você poderia, a partir de uma análise na fiação elétrica, inferir se houve ou não sobreaquecimento à luz do assunto tratado nesta aula?

Parede com geração interna de energia térmica interna (calor)

Considere uma parede plana de 8 cm de nicromo (liga com 80% Ni e 20% de Cr) que possui geração interna de calor uniforme de 0,25 MW/m^3. Um lado da parede está isolado termicamente enquanto o outro está exposto a um ambiente a 20 ºC e $h = 50$ W/m^{2}K. Determine a temperatura máxima da parede e as temperaturas em ambos lados dela.



Solução:

Considerando regime permanente, condução unidimensional, geração de energia térmica (calor) uniforme.

Das hipóteses acima: $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''_G}{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{q'''_G}{k}x + C_1$.

CC1: Parede interna (1) é adiabática

$$q_{x=0} = -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad -k\left(-\frac{q'''_G}{k}(0) + C_1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

prof. Simões - www.usp.br/sisea

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''_G}{k}x \qquad \rightarrow \qquad T = -\frac{q'''_G}{2k}x^2 + C_2$$

CC2: Parede externa transfere calor por convecção

$$q_L = -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = h(T_L - T_\infty)$$

$$-k\left(-\frac{q'''_G}{k}L\right) = h(-\frac{q'''_G}{2k}L^2 + C_2 - T_\infty) \qquad \rightarrow \qquad C_2 = \frac{q'''_G L}{h} + \frac{q'''_G L^2}{2k} + T_\infty$$

Logo, a distribuição de temperaturas será: $T(x) = \frac{q'''_G}{2k}\left(L^2 - x^2\right) + \frac{q'''_G L}{h} + T_\infty$

Para encontrar a posição da temperatura máxima na placa, a distribuição da temperatura é derivada em *x*:

$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{q'''_G}{2k}\left(L^2 - x^2\right) + \frac{q'''_G L}{h} + T_\infty\right] = -\frac{2xq'''_G}{2k} = 0$, logo, $x_{\max} = 0$.

O nicromo tem uma condutividade térmica de $k = 15$ W/mK

A temperatura máxima na parede será:

$$T_{máx} = T(0) = \frac{q'''_G L^2}{2k} + \frac{q'''_G L}{h} + T_\infty = \frac{250000 \times 0,08^2}{2 \times 15} + \frac{250000 \times 0,08}{50} + 20$$

$T_{máx} = 473,3\,^{\circ}\text{C}$

$T_1 = 473,3\,^{\circ}\text{C}$

$$T_2 = T(L) = \frac{q'''_G L}{h} + T_\infty = \frac{250000(0,08)}{50} + 20$$

$T_2 = 420\,^{\circ}\text{C}$

---

prof. Simões - www.usp.br/sisea