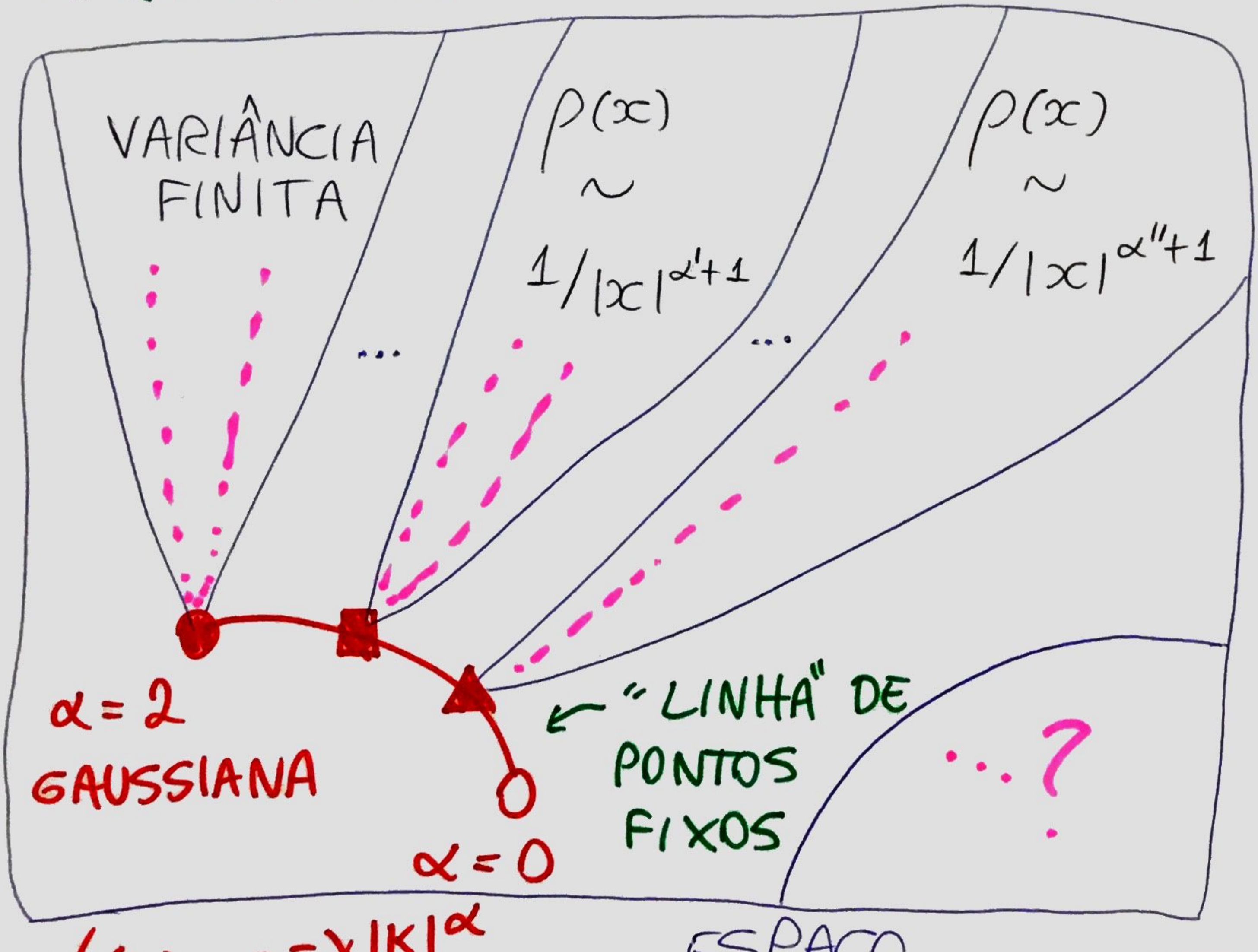
2021-1, "STATPHYS", AULA 09

OBJETIVO: CONTINUAR A DISCUSSÃO SOBRE RENORMALIZAÇÃO EM PROBABILIDADE

(CONT.) RENORMALIZAÇÃO (EM SEQUÊNCIAS I.I.D.)



$\phi(k) = e^{-\gamma|k|^{\alpha}}$

ESPAÇO FUNCIONAL

$$X'_i = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=in}^{(i+1)n-1} X_j$$

$$\hookrightarrow \rho_{X_j}(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$$

$$\boxed{\rho_{X'_i}(x) = T_n\left(\rho_{X_i}(x)\right)}$$

VAMOS TRABALHAR COM DENSIDADES E $n=2$, É UMA CONVOLUÇÃO SIMPLES! SABEMOS QUE, PARA $c \neq 0$,

$$\rho_{cX}(x) = \frac{1}{|c|} \rho_X\left(\frac{x}{c}\right)$$

E QUE $Z = X+Y$ COM X E Y INDEPENDENTES LEVA A

$$\rho_Z(z) = \int dx \, \rho_X(x) \rho_Y(z-x).$$

COM $n=2$, $X'_0 = \frac{1}{2^{1/\alpha}}(X_0 + X_1)$ E

$$\rho_{X'}(x) = \int d\mu \left[2^{1/\alpha} \rho(2^{1/\alpha}\mu)\right] \cdot \left[\rho(2^{1/\alpha}(-\mu+x)) \cdot 2^{1/\alpha}\right]$$

COM MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$\mu \to \xi \equiv 2^{1/\alpha} \cdot \mu$$

LEVA A

$$\boxed{\rho_{X'}(x) = 2^{1/\alpha} \int d\xi \, \rho(\xi) \cdot \rho(2^{1/\alpha} x - \xi)} \, .$$

AGORA, VAMOS REALIZAR UMA ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR EM TORNO DO PONTO FIXO $\rho^* = T_2(\rho^*)$. A CONSTRUÇÃO INICIAL É ANÁLOGA AO PROBLEMA VARIACIONAL QUE RESULTA NAS EQS. DE EULER-LAGRANGE.

$$\rho(x) = \rho^*(x) + \underbrace{\eta(x)}_{\equiv \varepsilon \,.\, h(x)}$$

ESPAÇO MÉTRICO DE DENSIDADES (NÃO VETORIAL!)

ESPAÇO VETORIAL DE PERTURBAÇÕES

FORMALMENTE, TEMOS UM ESPAÇO AFIM, COMO EM $P = Q + \overrightarrow{QP}$ ...

$$T_2(\rho^* + \varepsilon h) - T_2(\rho^*) =$$

$$= -2^{1/\alpha} \int d\xi \, \rho^*(\xi) \rho^*(2^{1/\alpha} x - \xi) +$$

$$+ \left\{ 2^{1/\alpha} \int d\xi \left[\rho^*(\xi) + \varepsilon h(\xi) \right] \cdot \left[\rho^*(2^{1/\alpha} x - \xi) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varepsilon h(2^{1/\alpha} x - \xi) \right] \right\} =$$

$$= 2^{1/\alpha} \int d\xi \, \rho^*(2^{1/\alpha} x - \xi) \, \varepsilon h(\xi) +$$

$$+ 2^{1/\alpha} \int d\xi \, \rho^*(\xi) \, \varepsilon h(\underbrace{2^{1/\alpha} x - \xi}_{\to \xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$

$$= 2 \cdot 2^{1/\alpha} \int d\xi \cdot \rho^*(2^{1/\alpha} x - \xi) \cdot \underbrace{\varepsilon h(\xi)}_{\eta(\xi)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

ORA, ASSIM COMO $f(x^* + \delta_n) \approx x^* + \delta_{n+1}$ PARA UM MAPA UNIDIMENSIONAL,

$T_2(\rho^* + \eta) \approx \rho^* + \eta'$ E

$$\boxed{\eta'(x) = DT_2(\eta(x))}$$

E O OPERADOR LINEAR DT_2 É DEFINIDO COMO

$$\boxed{DT_2(\eta(x)) \equiv 2 \cdot 2^{1/\alpha} \int d\xi \cdot \rho^*(2^{1/\alpha}x - \xi)\,\eta(\xi)}.$$

É FACTÍVEL ESPERAR QUE O ESPAÇO DAS FUNÇÕES $h(x)$, CARACTERIZADO POR $\int h(x)dx = 0$ (POIS ISSO GARANTE QUE $\int [\rho(x) + \varepsilon h(x)]\, dx = 1$ PARA QUALQUER DENSIDADE $\rho(x)$), SEJA UM ESPAÇO DE HILBERT. SE DT_2 POSSUIR UM CONJUNTO COMPLETO DE AUTOFUNÇÕES,

$$\boxed{DT_2[\theta_n(x)] = \lambda_n \theta_n(x)},$$

NOTE QUE $\lambda_0 = 2$, $\theta_0(x) = \rho^*(x)$.

CADA $\eta(x)$ ADMITE UMA EXPANSÃO

$$\boxed{\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \cdot \theta_n(x)}$$

E

$$\eta' = DT_2(\eta) \Rightarrow \sum_n \nu_n' \theta_n = DT_2\left(\sum_n \nu_n \theta_n\right)$$

$$= \sum_n \nu_n \, DT_2(\theta_n)$$

$$= \sum_n \nu_n \lambda_n \theta_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nu_n' = \lambda_n \nu_n}$$

PARA QUE UMA CERTA $\rho(x) = \rho^*(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n \theta_n(x)$

PERTENÇA À BACIA DE ATRAÇÃO DE $\rho^*(x)$ SOB T_2, É PRECISO QUE $\lambda_n < 1$ QUANDO $\nu_n \neq 0$. NESSAS CONDIÇÕES,

$\nu_n \xrightarrow{m \to \infty} 0$, SE $n > 0$.

OS "PARÂMETROS DE ESCALA" ν_n DE UMA CERTA $\rho(x)$ SÃO RELEVANTES, MARGINAIS OU IRRELEVANTES SE $\lambda_n > 1$, $\lambda_n = 1$ OU $\lambda_n < 1$, RESPECTIVAMENTE.