03/06/2022 - Gabarito E4

1. Encontrar uma aproximação da função $f(x) = e^x$ por um polinômio de grau menor ou igual a 2 no intervalo $[0,2]$, usando o método dos mínimos quadrados.

R.: Chamemos de $P(x) = c\cdot 1 + b\cdot x + a\cdot x^2$ o polinômio desejado, então, teremos o seguinte sistema normal:

$$\begin{cases} c\langle g_1, g_1\rangle + b\langle g_1, g_2\rangle + a\langle g_1, g_3\rangle = \langle g_1, f\rangle \\ c\langle g_2, g_1\rangle + b\langle g_2, g_2\rangle + a\langle g_2, g_3\rangle = \langle g_2, f\rangle \\ c\langle g_3, g_1\rangle + b\langle g_3, g_2\rangle + a\langle g_3, g_3\rangle = \langle g_3, f\rangle \end{cases}$$

com:

- $\langle g_1, g_1\rangle = \int_0^2 1\cdot 1\, dx = \int_0^2 1\, dx = x\Big|_0^2 = 2-0 = \underline{2},$

- $\langle g_1, g_2\rangle = \int_0^2 1\cdot x\, dx = \int_0^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2-0 = \underline{2},$

- $\langle g_1, g_3\rangle = \int_0^2 1\cdot x^2\, dx = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \underline{\frac{8}{3}},$

- $\langle g_1, f\rangle = \int_0^2 1\cdot e^x\, dx = \int_0^2 e^x\, dx = e^x\Big|_0^2 = e^2 - e^0 = \underline{e^2 - 1},$

- $\langle g_2, g_2\rangle = \int_0^2 x\cdot x\, dx = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \underline{\frac{8}{3}},$

- $\langle g_2, g_3\rangle = \int_0^2 x\cdot x^2\, dx = \int_0^2 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4-0 = \underline{4},$

- $\langle g_2, f\rangle = \int_0^2 x\cdot e^x\, dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x\, dx = 2e^2 - e^2 + 1 = \underline{e^2+1},$

$\cdot \langle g_3, g_3 \rangle = \int_0^2 x^2 \cdot x^2 \, dx = x^4 \Big|_0^2 = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} - 0 = \underline{\frac{32}{5}}$

$\cdot \langle g_3, f \rangle = \int_0^2 x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x \cdot 2x \, dx = 4e^2 -$
$2 \cdot \left(x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx \right) = 4e^2 - 2(e^2+1) = \underline{2e^2 - 2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & 8/3 & e^2-1 \\ 2 & 8/3 & 4 & e^2+1 \\ 8/3 & 4 & \frac{32}{5} & 2e^2-2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Por MEG, temos:}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3e^2-21 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{111}{2} - \frac{15e^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15e^2}{4} - \frac{105}{4} \end{array}\right] \therefore P(x) = 3e^2 - 21 + \left(\frac{111}{2} - \frac{15e^2}{2}\right)x + \left(\frac{15e^2}{4} - \frac{105}{4}\right)x^2$$

2. Se $P_1(x)$ é o polinômio encontrado acima, e $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$, ache os resíduos quadráticos destes dois polinômios como aproximação da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0,2]$.

R.: 1. $Res(P_2, f) = \int_0^2 \left(e^x - (1 + x + x^2/2)\right)^2 dx \approx \underline{1{,}399}$

2. $Res(P_1, f) = \int_0^2 \left(e^x - \left(3e^2 - 21 + \left(\frac{111}{2} - \frac{15e^2}{2}\right)x + \left(\frac{15e^2}{4} - \frac{105}{4}\right)x^2\right)\right)^2 dx$
$\approx \underline{0{,}0106}$

3. Se $\{P_0(x), \ldots, P_k(x)\}$ é uma família ortogonal de polinômios em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$, mostre que se $q(x)$ for um polinômio de grau menor que $k \Rightarrow \langle P_k, q \rangle = 0$

R.: Como $q(x)$ é polinômio de grau n menor ou igual a K e $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_K(x)\}$ é família ortogonal, é possível decompor $q(x)$ como $a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_nP_n(x) \Rightarrow$ $\langle P_K(x), q(x)\rangle = \int_a^b P_K(x)q(x)\,dx = \int_a^b P_K(x)(a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_nP_n(x))\,dx$ $= a_0\int_a^b P_K(x)P_0(x)dx + a_1\int_a^b P_K(x)P_1(x)dx + \dots + a_n\int_a^b P_K(x)P_n(x)dx =$ $= a_0\cdot 0 + a_1\cdot 0 + \dots + a_n\cdot 0$, pois $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_K(x)\}$ é ortogonal em relação à $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Logo $\langle P_K(x), q(x)\rangle =$ $a_0\cdot 0 + a_1\cdot 0 + \dots + a_n\cdot 0 = 0$. $\square$

4. Use a fórmula de recorrência para polinômios mônicos ortogonais para calcular os polinômios p_3 e p_4 da família dos polinômios de Legendre.

R.: Como a fórmula de recorrência para polinômios ortogonais é $P_K(x) = (x - a_K)P_{K-1}(x) - b_KP_{K-2}(x)$, com $a_K = \dfrac{\langle xP_{K-1}, P_{K-1}\rangle}{\langle P_{K-1}, P_{K-1}\rangle}$ e $b_K = \dfrac{\langle xP_{K-1}, P_{K-2}\rangle}{\langle P_{K-2}, P_{K-2}\rangle}$. Então,

como $P_1 = x$ e $P_2 = x^2 - 1/3$, temos:

$$\cdot P_3:\ a_3 = \frac{\langle x(x^2-1/3), x^2-1/3\rangle}{\langle x^2-1/3, x^2-1/3\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x(x^2-1/3)^2dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)^2dx} = 0,$$

$$b_3 = \frac{\langle x(x^2-1/3), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1/3)dx}{\int_{-1}^{1} x^2dx} = \frac{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{15},$$

$$\Rightarrow P_3(x) = (x-0)(x^2-1/3) - (4/15)x = x^3 - (1/3)x - (4/15)x = \underline{x^3 - (3/5)x},$$

$$\cdot\, P_4:\ a_4 = \frac{\langle x(x^3-(3/5)x),\, x^3-(3/5)x\rangle}{\langle x^3-(3/5)x,\, x^3-(3/5)x\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x(x^3-(3/5)x)^2\,dx}{\int_{-1}^{1}(x^3-(3/5)x)^2\,dx} = \underline{0}$$

$$b_4 = \frac{\langle x(x^3-(3/5)x),\, x^2-1/3\rangle}{\langle x^2-1/3,\, x^2-1/3\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x(x^2-1/3)(x^3-(3/5)x)\,dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)^2\,dx} = \frac{8/175}{8/45} = \underline{\frac{9}{35}}$$

$$\Rightarrow P_4(x) = (x-0)(x^3-(3/5)x) - (9/35)(x^2-1/3) = x^4 - (3/5)x^2 - (9/35)x^2 + 3/35 = \underline{x^4 - (6/7)x^2 + 3/35}$$

5. Encontre os três primeiros polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)\,dx$

R.: Tomando $P_0(x) = 1 \Rightarrow P_1(x) = x + a$; $\langle P_0, P_1\rangle = \int_0^2 P_0(x)P_1(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^2 1\cdot(x+a)\,dx = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + a\cdot x\Big|_0^2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2a = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{a = -1}$, $\Rightarrow P_1(x) = \underline{x - 1}$

Pela fórmula de recorrência, temos:

$$P_2:\ a_2 = \frac{\langle x(x-1),\, x-1\rangle}{\langle x-1,\, x-1\rangle} = \frac{\int_0^2 x(x-1)^2\,dx}{\int_0^2 (x-1)^2\,dx} = \frac{2/3}{2/3} = \underline{1}$$

$$b_2 = \frac{\langle x(x-1),\, 1\rangle}{\langle 1,\, 1\rangle} = \frac{\int_0^2 x(x-1)\,dx}{\int_0^2 1\,dx} = \frac{2/3}{2} = \underline{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = (x-1)\cdot(x-1) - (1/3)\cdot 1 = x^2 - 2x + 1 - 1/3 = \underline{x^2 - 2x + 2/3}$$

$\therefore$ $\underline{P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x - 1 \text{ e } P_2(x) = x^2 - 2x + 2/3}$