Gabarito - L1

1. Prove que $\sqrt{10}$ é irracional.

Assuma $\sqrt{10}$ racional $\Rightarrow \exists\, p$ e $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1 \Rightarrow \sqrt{10} = p/q$

$\sqrt{10} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{10})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 = p^2/q^2 \Rightarrow 10q^2 = p^2 = 2\cdot(5q^2) = p^2$

$\Rightarrow p^2$ par, como p^2 par $\Leftrightarrow p$ par $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : p = 2k \Rightarrow p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow$
como $10q^2 = p^2$, $10q^2 = 4k^2 \Rightarrow 5q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
$5q^2$ é par, mas 5 é ímpar $\Rightarrow q^2$ é par, logo q par, como já visto sobre $p^2 \Rightarrow$
$\exists\, r \in \mathbb{Z} : q = 2r \Rightarrow q^2 = 4r^2$.

$\therefore \frac{p}{q} = \frac{2k}{2r} = \frac{k}{r}$, ou seja $mdc(p,q)$ é, no mínimo, $2 \neq 1$ $\therefore$ Absurdo

Logo, $\nexists\, p$ e $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1 : \sqrt{10} = p/q \Rightarrow \sqrt{10}$ é irracional. $\square$

2. $[AC.17]_{16} \rightarrow [\quad]_{10}$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (Base 16)

$A = 10$, $C = 12$

$AC.17 = 10\cdot 16 + 12 + 1\cdot(1/16) + 7\cdot(1/16^2) =$
$= 160 + 12 + 1/16 + 7/16^2 = 172 + 0{,}0625 +$
$+ 0{,}02734375 = \underline{172{,}089843} \Rightarrow$

$$\underline{[AC.17]_{16} = [172{,}089843]_{10}}$$

3. $3{,}275 \Rightarrow$

$1 :: 3{,}275 = [b_1 b_2 \dots b_n]_2 + \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_{n+2}}{2^2} + \cdots$

· Parte inteira: $3 = 2 + 1 = 1\cdot 2 + 1\cdot 2^0 =$
$= [11]_2$

· Parte fracionária: $0{,}275 = \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2^2} + \cdots$

$2\cdot 0{,}275 = 2(b_3/2 + b_4/2^2 + \cdots) \Rightarrow$
$0{,}550 = b_3 + b_4/2 + b_5/2^2 + \cdots \Rightarrow$
$0 + 0{,}550 = b_3 + b_4/2 + b_5/2^2 + \cdots \Rightarrow$
$b_3 = 0$.
$0{,}550 = b_4/2 + \cdots \Rightarrow 1{,}100 = b_4 + \cdots$
$\Rightarrow 1 + 0{,}1 = b_4 + b_5/2 + \cdots \Rightarrow b_4 = 1$
$0{,}1 = b_5/2 + b_6/2^2 + \cdots \Rightarrow 0{,}2 = b_5 + \cdots$
$\Rightarrow b_5 = 0 ; 0{,}4 = b_6 + b_7/2 + \cdots \Rightarrow$
$b_6 = 0 ; 0{,}8 = b_7 + b_8/2 + \cdots \Rightarrow b_7 = 0$
$1{,}6 = b_8 + b_9/2 + \cdots \Rightarrow b_8 = 1 ; 1{,}2 = b_9 +$
$\cdots \Rightarrow b_9 = 1 \Rightarrow 0{,}2$ aparece novamente

$\therefore [3{,}275]_{10} = [11{,}01\overline{0011}]_2$

2.: $3{,}275 = 3 + 0{,}275 \Rightarrow$

· Parte inteira: $3 = 3 \cdot 16^0 = [3]_{16}$

· Parte fracionária: $0{,}275 = b_2/16 + \cdots$

$\Rightarrow 16 \cdot 0{,}275 = b_2 + b_3/16 + \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow 4{,}4 = b_2 + b_3/16 + \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + 0{,}4 = b_2 + b_3/16 + \cdots \Rightarrow b_2 = 4$

$0{,}4 = b_3/16 + b_4/16^2 + \cdots \Rightarrow 6{,}4 =$

$b_3 + b_4/16 + \cdots \Rightarrow b_3 = 6$

$6{,}4 = b_4 + b_5/16 + \cdots \Rightarrow b_4 = 6$

(Chegamos a mais uma dízima periódica)

$\therefore [3{,}275]_{10} = [3{,}4\overline{6}]_{16}$

3.: $3{,}275 = 0{,}3275 \cdot 10^1 \Rightarrow$

$0{,}328 \cdot 10^1$, para três algarismos significativos $\Rightarrow \underline{+328+01}$ (na base 10)

· Na base 2: $11{,}01 \Rightarrow 11{,}1 = 0{,}111 \cdot 2^2$

$\Rightarrow \underline{+111+02}$

· Na base 16: $3{,}4\overline{6} = 3{,}466\overline{6} \Rightarrow 3{,}47 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}347 \cdot 16^1 \Rightarrow \underline{+347+01}$

$2/3 = 0{,}\overline{6}$, na base 10

1.: $0{,}\overline{6} = 0 + 0{,}\overline{6} \Rightarrow [0]_2$

$2 \cdot 0{,}\overline{6} = 1{,}\overline{3} = b_2 + b_3/2 + \cdots \Rightarrow b_2 = 1$

$2 \cdot 0{,}\overline{3} = 0{,}\overline{6} = b_3 + b_4/2 + \cdots \Rightarrow b_3 = 0$

$2 \cdot 0{,}\overline{6} = 1{,}\overline{3} = b_4 + b_5/2 + \cdots \Rightarrow b_4 = 1$

logo, chegamos a uma dízima periódica. Portanto:

$[0{,}\overline{6}]_{10} = [0{,}\overline{10}]_2$

2.: $0{,}\overline{6} = b_2/16 + \cdots \Rightarrow 16 \cdot 0{,}\overline{6} =$

$10{,}\overline{6} = b_2 + b_3/16 + \cdots \Rightarrow b_2 = A$

$0{,}\overline{6} = b_3/16 + \cdots$ (já chegamos à dízima)

$\Rightarrow [0{,}\overline{6}]_{10} = [0{,}\overline{A}]_{16}$

3.: $0{,}\overline{6} = 0{,}6666\overline{6} \Rightarrow 0{,}667 \cdot 10^0$

$\Rightarrow \underline{+667+00}$, (base 10)

· base 2: $0{,}\overline{10} = 0{,}1010\overline{10} \Rightarrow 0{,}101 \cdot 2^0$

$\Rightarrow \underline{+101+00}$

· base 16: $0{,}\overline{A} = 0{,}AAA\overline{A} \Rightarrow 0{,}AAB \cdot 16^0$

$\Rightarrow \underline{+AAB+00}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414214$

1.: $1{,}414214 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 2^0 = [1]_2$

$0{,}414214 = b_2/2 + \cdots \Rightarrow$

$0{,}828428 = b_2 + b_3/2 + \cdots \Rightarrow b_2 = 0$

$1{,}656856 = b_3 + b_4/2 + \cdots \Rightarrow b_3 = 1$

$1{,}313712 = b_4 + b_5/2 + \cdots \Rightarrow b_4 = 1$

$0{,}627424 = b_5 + b_6/2 + \cdots \Rightarrow b_5 = 0$

$1{,}254848 = b_6 + b_7/2 + \cdots \Rightarrow b_6 = 1$

$\vdots$

$\Rightarrow [1{,}414214]_{10} \approx [1{,}01101]_2$

2.: $1{,}414214 = 1 + 0{,}414214 \Rightarrow$

$1 = 1 \cdot 16^0 = [1]_{16}$

$0{,}414214 = b_2/16 + b_3/16^2 + \cdots \Rightarrow$

$6{,}627424 = b_2 + b_3/16 + \cdots \Rightarrow b_2 = 6$

$10{,}038784 = b_3 + b_4/16 + \cdots \Rightarrow b_3 = A$

$0{,}620544 = b_4 + b_5/16 + \cdots \Rightarrow b_4 = 0$

$9{,}928704 = b_5 + b_6/16 + \cdots \Rightarrow b_5 = 9$

$14{,}859264 = b_6 + b_7/16 + \cdots \Rightarrow b_6 = E$

$\vdots$

$\Rightarrow [1{,}414214]_{10} \approx [1{,}6A09E]_{16}$

3.: $\sqrt{2} \approx 1{,}414214 = 0{,}1414214 \cdot 10^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}141 \cdot 10^1 \Rightarrow \underline{+141+01}$ (Base 10)

· Base 2: $1{,}01101 = 0{,}101101 \cdot 2^1 \Rightarrow$

$0{,}110 \cdot 2^1 \Rightarrow \underline{+110+01}$

· Base 16: $1{,}6A09E = 0{,}16A09E \cdot 16^1 \Rightarrow$

$0{,}16A \cdot 16^1 = \underline{+16A+01}$

4. $M = \{\pm 0{,}d_1 \ldots d_8 \times 8^e\}$, máx. absoluto de e é $[777]_8$

1.: $\underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{8}{\_}$; $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7 \cdot 8^7$ como pode + ou −

$\Rightarrow 2 \cdot 7 \cdot 8^7 + 1$ (0 zero em M)

$[777]_8 = 7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 = [511]_{10} \Rightarrow$

$(2 \cdot 511 + 1) 2 \cdot 7 \cdot 8^7$. Como sinal de e pode ser ou + ou − $\Rightarrow \underline{(2 \cdot 511 + 1) 2 \cdot 7 \cdot 8^7 + 1}$

2.: $\pi \approx [3{,}141593]_{10}$

$3 = 3 \cdot 8^0 = [3]_8$

$0{,}141593 = b_2/8 + \cdots \Rightarrow$

$1{,}132744 = b_2 + b_3/8 + \cdots \Rightarrow b_2 = 1$

$1{,}061952 = b_3 + b_4/8 + \cdots \Rightarrow b_3 = 1$

$0{,}495616 = b_4 + b_5/8 + \cdots \Rightarrow b_4 = 0$

$3{,}964928 = b_5 + b_6/8 + \cdots \Rightarrow b_5 = 3$

$7{,}719424 = b_6 + b_7/8 + \cdots \Rightarrow b_6 = 7$

$5{,}755392 = b_7 + b_8/8 + \cdots \Rightarrow b_7 = 5$

$6{,}043136 = b_8 + b_9/8 + \cdots \Rightarrow b_8 = 6$

$0{,}345088 = b_9 + b_{10}/8 + \cdots \Rightarrow b_9 = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow [3{,}141593]_{10} = 0{,}31103756 \cdot 8^1$ em M ✓

5. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, com $\varepsilon = 0{,}001$

1.: Encontrar o intervalo $[a,b]$: $P(a) \cdot P(b) < 0$ e P monótona:

$P'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm 4}{6} =$

$= \dfrac{1 \pm 2}{3} \begin{cases} 1 \\ -1/3 \end{cases}$

· $]-\infty, -1/3]$: Tome $x = -2/3 \Rightarrow x \in]-\infty, -1/3]$

$P'(-2/3) = 3(-2/3)^2 - 2(-2/3) - 1 = 1 + 2/3 > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty, -1/3]$, $P'(x) > 0$

· $]-1/3, 1[$: Tome $x = -1/5 \Rightarrow x \in]-1/3, 1[$

$P'(-1/5) = 3(-1/5)^2 - 2(-1/5) - 1 = -12/25 < 0 \Rightarrow \forall x \in]-1/3, 1[$, $P'(x) < 0$

$\cdot\ [1, \infty[$: Tome $x = 2 \Rightarrow x \in [1, \infty[$

$P'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 2(2) - 1 = 7 > 0$

$\Rightarrow \forall x \in [1, \infty[\,,\ P'(x) > 0$

$P(-1/3) = (-1/3)^3 - (-1/3)^2 - (-1/3) - 1 = \dfrac{-22}{27}$

$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - (1) - 1 = -2$

$\therefore$ raiz está em $[1, \infty[$, com $x > 1$, pois é quando $P' > 0$, ou seja P volta a crescer.

Chamemos de $x_0 = 2 \Rightarrow$

$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - (2) - 1 = 1$ $\therefore$ raiz $\alpha \in [1, 2]$, pois $P' > 0$ (crescente) e $P(1)P(2) < 0$

$\cdot$ Tome $x_1 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow P(3/2) = (3/2)^3 - (3/2)^2 - (3/2) - 1 = -1{,}375 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}5; 2]$

$\cdot\ x_2 = \dfrac{3/2 + 2}{2} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow P(7/4) = (7/4)^3 - (7/4)^2 - 7/4 - 1 = -0{,}453725 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}75; 2]$

$\cdot\ x_3 = \dfrac{7/4 + 2}{2} = \dfrac{15}{8} \Rightarrow P(15/8) = (15/8)^3 - (15/8)^2 - 15/8 - 1 \approx 0{,}201172 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}75; 1{,}875]$

$\cdot\ x_4 = \dfrac{7/4 + 15/8}{2} = \dfrac{29}{16} \Rightarrow P(29/16) = (29/16)^3 - (29/16)^2 - 29/16 - 1 \approx -0{,}143371 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}8125; 1{,}875]$

$\cdot\ x_5 = \dfrac{\frac{29}{16} + \frac{15}{8}}{2} = \dfrac{59}{32} \Rightarrow P(59/32) = \left(\dfrac{59}{32}\right)^3 - \left(\dfrac{59}{32}\right)^2 - \dfrac{59}{32} - 1 \approx 0{,}024561 > 0 \Rightarrow$

$\alpha \in [1{,}8125; 1{,}84375]$

$\cdot\ x_6 = \left(\dfrac{29}{16} + \dfrac{59}{32}\right)/2 = \dfrac{117}{64} \Rightarrow$

$P(117/64) = (117/64)^3 - (117/64)^2 - (117/64) - 1 \approx -0{,}060497 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}82813; 1{,}84375]$

$\cdot\ x_7 = \left(\dfrac{117}{64} + \dfrac{59}{32}\right)/2 = \dfrac{235}{128} \Rightarrow$

$P(235/128) = (235/128)^3 - (235/128)^2 - (235/128) - 1 \approx -0{,}018271 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}83594; 1{,}84375]$

$\cdot\ x_8 = \left(\dfrac{235}{128} + \dfrac{59}{32}\right)/2 = \dfrac{471}{256} \Rightarrow$

$P(471/256) \approx 0{,}003048 > 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}83594; 1{,}83984]$

$\cdot\ x_9 = \left(\dfrac{235}{128} + \dfrac{471}{256}\right)/2 = \dfrac{941}{512} \Rightarrow$

$P(941/512) \approx -0{,}007629 < 0 \Rightarrow \alpha \in [1{,}83789; 1{,}83984]$

$E_K = \left|\dfrac{a_K - b_K}{2}\right| \Rightarrow E_9 = \dfrac{|1{,}83789 - 1{,}83984|}{2} = \dfrac{0{,}00195}{2} = 0{,}000975 < 0{,}001 = \varepsilon$

$\therefore$ Aproximação de α é:

$\dfrac{1{,}83789 + 1{,}83984}{2} = \underline{1{,}838865}$

6. $x^3 - x^2 - x - 1$, $\varepsilon = 0{,}001$ por Newton

Queremos os zeros de $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

$\Rightarrow$ queremos os $x_n \in$ Dom f : $f(x) = 0 \Rightarrow x$:
$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Com a análise feita sobre a $f(x)$ no exercício 5., temos que $f'(1) = 0$ e $[1, \infty+[$ $f' > 0$, e $\alpha \in]1, \infty+[$. Para escolhermos nosso x_0, um candidato saudável seria $x_0 : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$f''(x) = (3x^2 - 2x - 1)' = 6x - 2 \Rightarrow f''(2) = 12 - 2$
$= 10 > 0$ e $f(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0$ $\therefore x_0 = 2$ é interessante

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^3 - x_n^2 - x_n - 1}{3x_n^2 - 2x_n - 1} \Rightarrow$$

$$\cdot\ x_1 = 2 + \frac{2^3 - 4 - 2 - 1}{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1} = 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$\cdot\ x_2 = \frac{15}{7} + \frac{(15/7)^3 - (15/7)^2 - (15/7) - 1}{3(15/7)^2 - 2(15/7) - 1} \approx$$

$$\approx 1{,}8395 \quad (15/7 = 1{,}\overline{857142})$$

$\cdot\ x_3 \approx 1{,}8393$

$\Rightarrow |x_3 - x_2| = 0{,}0002 < 0{,}001$ $\therefore$ $\underline{\alpha \approx 1{,}8393}$