2020-1, "STATPHYS", AULA 05

OBJETIVOS: ENTENDER V.A.'S DISTRIBUÍDAS <u>CONJUNTAMENTE</u>; DESTACAR <u>SOMAS</u> DE V.A.'S <u>INDEPENDENTES</u>.

ONDE ESTAMOS: 1.2 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

INÍCIO DA AULA

* DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS E MARGINAIS

→ CONJUNTA: $\boxed{\rho_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)}$

$$\rho_{X,Y}(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y \approx \mathbb{P}(x \le X \le x+\Delta x,\ y \le Y \le y+\Delta y)$$

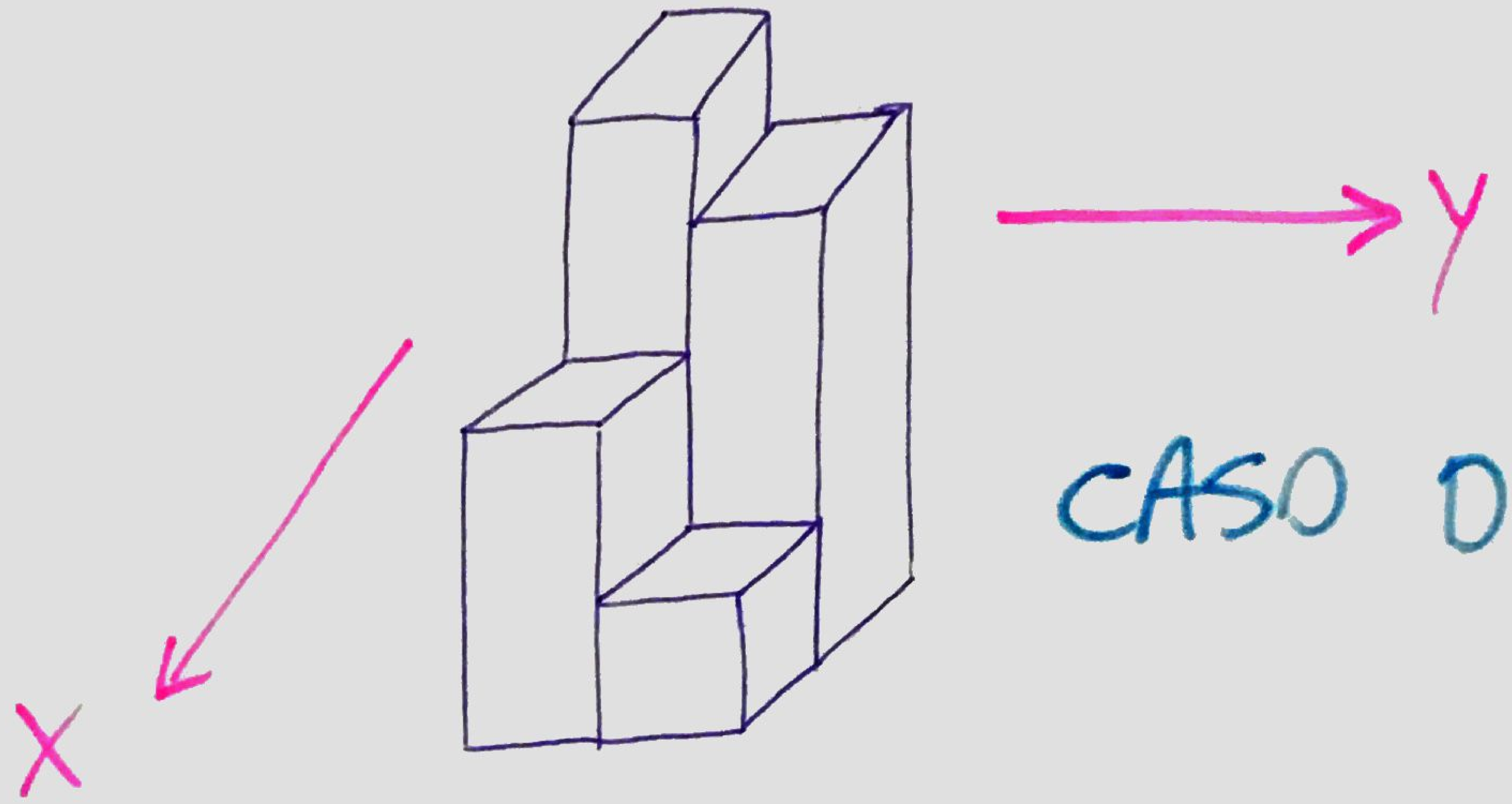
$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ CASO DISCRETO

MAIS RIGOR?

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \rho_{X,Y}(x',y')\,dy'\,dx'$$

É CLARO QUE $\iint_{\mathbb{R}^2} \rho_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1.$



CASO DISCRETO

$\longrightarrow$ MARGINAL: $\rho_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{X,Y}(x,y)\,dy$

NORMALIZAÇÃO $\rightsquigarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(x)\,dx = 1$

◊ EXEMPLOS

(i)

X \ Y	0	1	
0	4/10	3/10	7/10
1	2/10	1/10	3/10
	6/10	4/10	

INVENTADA!

$\rightarrow \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1)$

← ↑ MARGENS

$\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} \neq \frac{2}{10}$

(ii)

≡0 MOD 3 \ ÍMPAR	SIM	NÃO	
SIM	1/6	1/6	2/6
NÃO	2/6	2/6	4/6
INDEPENDÊNCIA!	3/6	3/6	

DADO 6 FACES

→ INDEPENDÊNCIA: $\boxed{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y) \quad \forall x,y}$

→ CONDICIONAL: $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

$\neq 0$

◇ EXEMPLO:

(i) VER ANTERIOR

$$\mathbb{P}(X=0 \mid Y=0) = \frac{\mathbb{P}(X=0, Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{4/10}{6/10} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=0) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{2/10}{6/10} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$\boxed{7}$ DISTRIBUIÇÕES EM (i): UMA CONJUNTA, DUAS MARGINAIS, QUATRO CONDICIONAIS.

* SOMAS DE V.A.'s → EM GERAL, MAL POSTO!

$$\rightarrow \boxed{\langle X+Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle}, \quad \text{POIS}$$

$$\langle X+Y\rangle \overset{?}{=} \iint (x+y)\,\rho_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$\rho_{X,Y}$

$$= \int dx \cdot x \left[\int dy\, \rho_{X,Y}(x,y)\right]$$

$$+$$

$$\int dy \cdot y \cdot \left[\int dx\, \rho_{X,Y}(x,y)\right] =$$

$$= \int x\,\rho_X(x)\,dx + \int y\,\rho_Y(y)\,dy = \langle X\rangle_{\rho_X} + \langle Y\rangle_{\rho_Y}$$

→ COVARIÂNCIA

$$\boxed{\mathrm{COV}(X,Y) \equiv \big\langle [X-\langle X\rangle]\cdot[Y-\langle Y\rangle]\big\rangle}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{C}(X,Y)$$

NOTAÇÃO DO PROFESSOR

◆ EXERCÍCIO: MOSTRE QUE

$\boxed{\mathbb{C}(X,Y) = \langle X.Y\rangle - \langle X\rangle\cdot\langle Y\rangle}$ E QUE $\mathbb{C}(X,Y)=0$ SE X E Y FOREM INDEPENDENTES. ◆

• COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

$$\boxed{\sigma_{X,Y} \equiv \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}}, \quad \sigma_X \equiv \sqrt{\mathbb{V}(X)}\,; \quad -1 \leq \sigma_{X,Y} \leq +1$$

◆ EXERCÍCIO: MOSTRE QUE

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1+X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + 2.\mathbb{C}(X_1,X_2)}.$$