EX. 17 INTEGRAÇÃO

(a) Calcule o polinómio de grau ≤ 4 que interpola $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ nos pontos $x_i = i$, $i = 0, \dots, 4$. Utilize-o para estimar $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, delimitando o erro.

Solução:

x	$f[x_i]$	1ª dif. div.	2ª dif. div.	3ª dif. div	4ª dif. div
0	0				
		$\frac{1}{1} = 1$			
1	1		$\frac{-1-1}{2-0} = -1$		
		$\frac{0-1}{2-1} = -1$		$\frac{1}{3}$	
2	0		$\frac{-1+1}{3-1} = 0$		0
		$\frac{-1-0}{3-2} = -1$		$\frac{1}{3}$	
3	-1		$\frac{1+1}{4-2} = 1$		
		$\frac{0+1}{4-3} = 1$			
4	0				

Então
$$p(x) = f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\underbrace{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}_{=0}$$

$$= 0 + x - x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$= x - x^2 - x + \frac{1}{3}x(x^2-3x+2) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{8x}{3}$$

Verificação:
$$\text{ok}\begin{cases} p(0) = 0, \quad p(1) = 1 \\ p(2) = 2-2 = 0, \quad p(3) = 3-6+2 = -1 \\ p(4) = 0 \end{cases}$$

- $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}70710$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

- Agora vamos delimitar o erro

$$|E(x)| \leq \frac{\max_{y\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f^{(5)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

então $\max_{y\in[0,4]} |f^{(n+1)}(y)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^5$

$$\Rightarrow |E(\tfrac{1}{2})| \leq \frac{(\pi/2)^5}{5!}\left|\left(\tfrac{1}{2}-0\right)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\left(\tfrac{1}{2}-2\right)\left(\tfrac{1}{2}-3\right)\left(\tfrac{1}{2}-4\right)\right|$$

$$\Rightarrow \left|E\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\pi^5}{2^5 \cdot 5!}\left|\frac{(-1)(-3)(-5)(-7)}{2^5}\right|$$

$$\Rightarrow \left|E\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\pi^5}{2^{10}\cdot 5!} \cdot 105 \simeq 0{,}26149$$

Erro exato $\left|p\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \simeq 0{,}1679 < 0{,}26149$

(b) Sabendo que $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ é o polinomio de grau ≤ 4 que interpola uma função $f(x)$ nos pontos $x_i = i$, $i = 0, \ldots, 4$, determine o polinómio de grau 3 que interpola esta mesma função f nos pontos $0, 1, 3, 4$.

<u>Solução:</u> Calculamos

$$p(0) = 1, \quad p(1) = -1$$

$$p(3) = 3^4 - 4\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 3 + 1 = 81 - 108 + 18 - 2 = -11$$

$$p(4) = 4^4 - 4\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - 4 + 1 = 29$$

Então podemos escrever a tabela:

x_i	$f[x_i]$	1ª dif. div.	2ª dif. div.	3ª dif. div.
$x_0 = 0$	1			
		-2		
$x_1 = 1$	-1		$\frac{-5+2}{3-0} = -1$	
		$\frac{-11+1}{3-1} = -5$		
$x_2 = 3$	-11			$\frac{15+1}{4-0} = 4$
		$\frac{29+11}{4-3} = 40$		
$x_3 = 4$	29		$\frac{40+5}{4-1} = 15$	
2				

Então, o polinómio de grau ≤ 3 que interpola $\{0, 1, 3, 4\}$ é

$$\varphi(x) = f[x_0] + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$= 1 - 2x - x(x-1) + 4x(x-1)(x-3)$$

$$= 1 - 2x - x^2 + x + 4x(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 4x^3 - 17x^2 + 11x + 1$$

Verificação:

ok

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = -1 \\ \varphi(3) = 1 - 6 - 6 = -11 \\ \varphi(4) = 1 - 8 - 12 + 48 = 29 \end{cases}$$

Outra abordagem: $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

$p(x_i) = f(x_i)$, $x_i = i$, $i = 0, \ldots, 4$

~~$p(x) = \sum_{i=0}^{4} \ell_i(x) f(x_i)$~~ , ~~$\ell_i(x)$ polinómio interpolador de Lagrange~~

~~[illegible]~~

- Seja $q(x) = p(x) + \alpha \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^{4} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i}$

onde q é um polinomio de grau 3.

- Vamos calcular α de tal maneira que q seja de grau 3. Como $p(x)$ e $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^{4} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i}$ são ambos de grau 4, precisamos cancelar os termos de ordem 4, obtemos:

$$0 = 1 + \alpha \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^{4} \frac{1}{x_2 - x_i} = 1 + \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = -4}$$

então $$q(x) = p(x) - 4 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x + 1 - x(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$= 4x^3 - 17x^2 + 11x + 1$$