## Lista de Exercício I

1. Construa todas as transformações no plano que deixam um quadrado invariante. Determine o grupo de simetrias e construa sua tabela de multiplicação.

2. Considere o grupo $S_3$ das permutações de 3 objetos, que tem 3! elementos. Determine o centro de $S_3$. Construa todos os automorfismos internos de $S_3$, e detemine a estrutura do grupo destes automosfismos. Ele é isomórfico a $S_3$?

3. Verifique se o conjunto de matrices abaixo forma um grupo pela operação de multiplicação de matrizes.

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ M_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ M_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Considere o grupo $S_4$ de permutações de 4 elementos, e portanto de ordem $4! = 24$. Calcule o centralizador do elemento de $S_4$ que corresponde à permutaç ão simples dos elementos 1 e 2. Este centralizador é um subgrupo de $S_4$? Se sim, qual sua estrutura?

5. Considere o exemplo 1.14 na página 11 da apostila. Determine os cosets dos espaços $G/H_n$, $n = 1, 2, \ldots$, e $H_m/H_n$, $m < n$, $m, n = 1, 2, \ldots$. Os subgrupos são invariantes? Em caso positivo, determine a estrutura dos grupos quocientes correspondentes.

6. Mostre que um grupo finito cuja ordem é um número primo, é necessariamente um grupo cíclico.

7. Como vimos em aula, os elementos do grupo $SU(2)$ podem ser parametrizados por três ângulos, e descritos pelas matrizes

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta\, e^{i\varphi_1} & \sin\theta\, e^{i\varphi_2} \\ -\sin\theta\, e^{-i\varphi_2} & \cos\theta\, e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix}; \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \varphi_a \leq 2\,\pi; \quad a = 1, 2$$

   (a) Construa a matriz

$$\eta_{ab} = \mathrm{Tr}\left( U^\dagger \frac{\partial U}{\partial \zeta_a} U^\dagger \frac{\partial U}{\partial \zeta_b} \right); \qquad a, b = 1, 2, 3$$

   onde denotamos $\zeta_1 = \theta$, $\zeta_2 = \varphi_1$ e $\zeta_3 = \varphi_2$.

   (b) Calcule o volume do grupo $SU(2)$ pela fórmula

$$V = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\,\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\,\pi} d\varphi_2\, \sqrt{\eta}; \qquad \eta \equiv \det \eta_{ab}$$

8. Prove que se $D$ e $D'$ são duas representações irredutíveis de um grupo $G$, de dimensões $d$ e $d'$ respectivamente, e se uma matriz $A$ satisfaz

$$D(g)A = AD'(g)$$

para todo $g \in G$, então segue que

   (a) se $d \neq d'$ então $A = 0$

   (b) se $d = d'$ então $A = 0$ ou então $D$ e $D'$ são equivalentes.

9. Construa a representação de $S_3$ que é o produto direto de duas cópias da representação irredutível $D''$ definida em (1.91) da apostila (construa as matrizes $4 \times 4$). Verifique se esta representação é redutível. No caso de ser, calcule como ela se decompõe em reps. irredutíveis de $S_3$.

10. Considere um sistema físico que possua uma simetria descrita por um grupo $G$. Com isto queremos dizer que existem transformações nos estados

$$T_g \; : \qquad \mid \psi\rangle \rightarrow T_g \mid \psi\rangle$$

tal que a composição das tranformações satisfaz

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 \cdot g_2}$$

com $g_1, g_2 \in G$.

Por simetria queremos dizer que existe um Hamiltoniano $H$ tal que se

$$H \mid \psi\rangle = E \mid \psi\rangle$$

então

$$HT_g \mid \psi\rangle = ET_g \mid \psi\rangle$$

Seja $V_E$ o conjunto dos estados com energia $E$ (autovalor de $H$), e suponha que $G$ atue transitivamente em $V_E$. Mostre que

   (a) se $K$ é o subgrupo das transformações de $G$ que deixam um dado estado de $V_E$ invariante, i.e.

$$T_h \mid \psi_0\rangle = \mid \psi_0\rangle \qquad\qquad h \in K$$

   então mostre que o subgrupo de simetria de qualquer outro estado de $V_E$ é necessariamente isomórfico a $K$.

   (b) Mostre que $V_E$ é isomórfico ao espaço coset $G/K$.

Obviamente $V_E$ constitute uma representação de $G$. Então:

- O fato de $G$ atuar em $V_E$ transitivamente implica que $V_E$ é irredutível?
- O fato de $V_E$ ser irredutível implica que $G$ age transitivamente em $V_E$?