EXERCÍCIOS DE ESPAÇOS DE HILBERT E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS MAP4003/ MAP5707

Os exercícios abaixo foram retirados ou baseados nos dos livros:

C) Introdução à Análise Funcional, César R. de Oliveira, Projeto Euclides.

Con) A course in functional analysis, John B. Conway, Springer.

B) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Haim Brezis, Universitext, Springer.

AU) Partielle Differenzialgleichungen, Arendt and Urban, Springer Spektrum.

Lembramos da nossa notação $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Exercício 1. Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno.

i. Mostre que se $(u, v) = (w, v)$ para todo $v \in E$, então $u = w$.

ii. Mostre que se E é um espaço real e u e v são tais que $\|u\| = \|v\|$, então $(u + v, u - v) = 0$.

Exercício 2. Mostre que num espaço vetorial com produto interno sempre vale $\|u\| = \max_{\|v\|=1} |(u, v)|$.

Exercício 3. (Identidades de polarização) Seja $(E, (.,.))$ um espaço vetorial com produto interno.

i. Mostre que se o espaço é real, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então

$$(u, v) = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right),$$

para todo $u, v \in E$.

ii. Mostre que se o espaço é complexo, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então

$$(u, v) = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2\right),$$

para todo $u, v \in E$.

iii. Se $(.,.)_1$ e $(.,.)_2$ são dois produtos internos diferentes num espaço vetorial E, então as normas $u \mapsto \|u\|_1 = \sqrt{(u, u)_1}$ e $u \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)_2}$ podem ser iguais?

Exercício 4. Mostre que para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

i. O conjunto $\mathcal{B}_{\rm c} = \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0, 1[; \mathbb{K})$, isto é, $\int_0^1 \sqrt{2}\cos(n\pi x)\sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = \delta_{nm}$, $\int_0^1 1\sqrt{2}\cos(m\pi x)dx = 0$ e $\int_0^1 1^2 dx = 1$, para $n, m \geq 1$.

ii. O conjunto $\mathcal{B}_{\rm s} = \{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(]0, 1[; \mathbb{K})$.

iii. O conjunto $\mathcal{B}_{\rm real} = \{1/\sqrt{2}\} \cup \{\mathrm{sen}(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(] - 1, 1[; \mathbb{K})$.

iv. O conjunto $\mathcal{B}_{\rm comp} = \{e^{in\pi x}/\sqrt{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(] - 1, 1[; \mathbb{C})$.

Exercício 5. Use a desigualdade de Bessel para mostrar que

i. Se $f \in L^2(]0, 1[; \mathbb{K})$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 0.$$

ii. Se $f \in L^2(] - 1, 1[; \mathbb{C})$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f(x)e^{in\pi x}dx = 0.$$

Exercício 6. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência real tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto $l_2^a(\mathbb{K})$ das sequências $x = (x_1, x_2, ...)$ de números em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_j|^2 < \infty$. Mostre que $l_2^a(\mathbb{K})$

é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar definidas como

$$(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...),$$
$$\lambda(x_1, x_2, ...) := (\lambda x_1, \lambda x_2, ...),$$

em que $x, y \in l_2^a(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre também que o produto interno

$$(x, y)_a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \overline{y_j}$$

está bem definido e que $(l_2^a(\mathbb{K}), (.,.)_a)$ é um espaço de Hilbert. Note que $l_2(\mathbb{K}) = l_2^a(\mathbb{K})$ para $a = (1, 1, 1, 1, ...)$.

Exercício 7. Considere o espaço $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ das sequências em $\mathbb{K}$ tais que $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2^{fin}(\mathbb{K})$ se, e somente se, $x_j \neq 0$ apenas para finitos $j \in \mathbb{N}$.

i. Mostre que $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ é um subespaço de $l_2(\mathbb{K})$.

ii. Considere o produto interno de $l_2(\mathbb{K})$ e o conjunto $\mathcal{B} = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ definido como $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$ e assim por diante. Considere a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} e_j$. Mostre que a sequência é de Cauchy. Ela converge em $l_2^{fin}(\mathbb{K})$? O espaço $l_2^{fin}(\mathbb{K})$ é um espaço de Hilbert?

Exercício 8. Considere em $\mathbb{R}^n$ as seguintes normas:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{j\in\{1,...,n\}} |x_j|.$$

Elas satisfazem a desigualdade do paralelogramo para todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$? Existem produtos internos associados a norma $\|.\|_1$ ou a norma $\|.\|_\infty$?

Exercício 9. O objetivo desse exercício é mostrar que se uma norma em um espaço vetorial E satisfaz a lei do paralelogramo, então existe um produto interno tal que a norma está associada a esse produto interno, ou seja, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Vamos considerar apenas espaços reais para facilitar.

Suponha que $\|.\| : E \to [0, \infty[$ seja uma norma que satisfaça a lei do paralelogramo:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2,$$

para todo $a, b \in E$. Vamos definir a função

$$(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Observe que $(u, u) = \|u\|^2$. Nosso objetivo é mostrar que esta função é um produto interno.

i. Mostre que $(u, v) = (v, u)$, $(-u, v) = -(u, v)$ e $(u, 2v) = 2(u, v)$, para todo $u, v \in E$.

ii. Mostre que $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$. (Dica: Use a lei do paralelogramo sucessivamente com 1) $a = u$, $b = v$, 2) $a = u + w$, $b = v + w$, 3) $a = u + v + w$, $b = w$.)

iii. Prove que $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in E$. (Dica: Prove para $\mathbb{N}$, depois para $\mathbb{Q}$ e, por fim, para $\mathbb{R}$.)

iv. Conclua o resultado (que $(.,.)$ é um produto interno).

Exercício 10. Sejam $a < b$ e $c < d$ números reais e $\mathcal{B} = \{e_j :]a, b[\to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ uma base de Hilbert de $L^2(]a, b[; \mathbb{K})$. Mostre que $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_j :]c, d[\to \mathbb{K} : j \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]c, d[; \mathbb{K})$, em que

$$\tilde{e}_j(x) = \sqrt{\frac{b - a}{d - c}} e_j(a + \frac{b - a}{d - c}(x - c)).$$

Exercício 11. i. Mostre que $\mathcal{B}_{\text{comp}} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(] - \pi, \pi[; \mathbb{C})$ e que $\mathcal{B}_{\text{s}} = \{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert de $L^2(]0, \pi[; \mathbb{K})$.

ii. Mostre que em $[0,\pi]$, temos

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1},$$

em que o limite é interpretado da forma:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left|1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{2n+1}\right|^2 dx = 0.$$

iii. Prove que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercício 12. Seja $(E,(.,.))$ um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que um conjunto ortonormal $\mathcal{O}\subset E$ é maximal se não estiver estritamente contido em nenhum outro conjunto ortonormal, isto é, se $\tilde{\mathcal{O}}\subset E$ for um conjunto ortonormal e se $\mathcal{O}\subset\tilde{\mathcal{O}}$, então $\mathcal{O}=\tilde{\mathcal{O}}$.

Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert. Mostre que um conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de Hilbert se, e somente se, $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal maximal.

Exercício 13. Seja $(E,(.,.))$ um espaço vetorial com produto interno e $F\subset E$ um subconjunto não vazio. Suponha que para todo $u\in E$, existam $f\in F$ e $f^{\perp}\in F^{\perp}$ tais que $u=f+f^{\perp}$. Conclua que F é um subespaço fechado de E.

Exercício 14. Seja $(E,(.,.))$ um espaço vetorial com produto interno. Mostre que se $F\subset E$ é um subespaço vetorial, então $\overline{F}$ também é um subespaço vetorial.

Exercício 15. Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert e $F\subset E$ um subconjunto não vazio. Mostre que

i. $F^{\perp}=[F]^{\perp}$.

ii. $F^{\perp\perp\perp}=F^{\perp}$.

iii. $(F^{\perp})^{\perp}=F$ se, e somente se, F for um subespaço vetorial fechado.

Exercício 16. Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert e $M,N\subset H$ dois subespaços fechados. Suponha que $(u,v)=0$ para todos $u\in M$ e $v\in N$. Mostre que $M+N=\{u+v\in H : u\in M, v\in N\}$ é um subespaço fechado.

Exercício 17. Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert separável.

i. Seja $V\subset H$ um subespaço denso em H. Prove que V contém uma base ortonormal de H.

ii. Seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores ortonormais em H, isto é, $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$. Prove que H contém uma base ortonormal que contém $\cup_{n=1}^{\infty}\{e_n\}$.

Exercício 18. (Projeção sobre um conjunto convexo. Corresponde ao Teorema 5.2 (Brézis)) Seja $(H,(.,.))$ um espaço de Hilbert real e $K\subset H$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio. Lembramos que K é convexo se para todo $u,v\in K$ e $t\in[0,1]$, temos $tu+(1-t)v\in K$.

i. Mostre que para todo $f\in H$, existe $u\in K$ tal que

$$\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v\in K\}.$$

(Dica: Repita o procedimento do teorema de projeção ortogonal: Ache uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tal que $\lim_{n\to\infty}\|v_n-f\| = \inf\{\|v-f\| : v\in K\}$ e use a lei do paralelogramo para mostrar que a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy).

ii. Mostre que $u\in K$ é tal que $\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v\in K\}$ se, e somente se,

$$(f-u, v-u)\le 0,\quad \forall v\in K.$$

(Dica: Se $u\in K$ é tal que $\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v\in K\}$, então para todo $w\in K$ e $t\in[0,1]$, temos $\|f-u\|^2\le\|f-((1-t)u+tw)\|^2$. Mostre que isto equivale a $2(f-u,w-u)\le t\|w-u\|^2$ e tome $t\to 0$.

Para mostrar o outro lado, mostre a identidade abaixo.

$$\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = 2(f-u, v-u) - \|u-v\|^2.)$$

iii. Mostre que o vetor $u \in K$ tal que $\|u-f\| = \inf\{\|v-f\| : v \in K\}$ é único. (Denotamos f por $\mathcal{P}_K u$.)

(Dica: Se u_1 e u_2 satisfazem essa propriedade, então para todo $v \in K$, temos

$$(f-u_1, v-u_1) \leq 0$$
$$(f-u_2, v-u_2) \leq 0$$

Tomando $v = u_2$ na primeira expressão e $v = u_1$ na segunda, some e conclua que $\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$).

Exercício 19. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert real, $K \subset H$ um fechado convexo não vazio, $f \in H$ e $u = \mathcal{P}_K f$.

i. Mostre que

$$\|v-u\|^2 \leq \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2, \quad \forall v \in K.$$

ii. Mostre que $\|u-v\| \leq \|v-f\|$, para todo $v \in K$. Dê uma interpretação geométrica.

Exercício 20. Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $F \subset E$ um subespaço. Mostre que $u \in F^\perp$ se, e somente se, $\|u-v\| \geq \|v\|$ para todo $v \in F$.

Exercício 21. Seja $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Mostre que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ se, e somente se, $\lim_{j\to\infty}(u_j, u) = \|u\|^2$ e $\lim_{j\to\infty}\|u_j\| = \|u\|$.

Exercício 22. Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que $\|Tu\| \geq C\|u\|$ para todo $u \in H$. Conclua que a imagem de T é um subespaço fechado.

Exercício 23. Sejam $(E, (.,.)_E)$ e $(F, (.,.)_F)$ dois espaços com produto interno e $T : E \to F$ uma transformação linear bijetora tal que $T^{-1} : F \to E$ é contínua. Mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Tu\|_F \geq C\|u\|_E$ para todo $u \in E$.

Exercício 24. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear contínuo. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

i. Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Tu\|_H \geq C\|u\|_H$ para todo $u \in H$.
ii. Existe um operador linear contínuo $S : H \to H$ tal que $STu = u$ para todo $u \in H$.

Exercício 25. Seja $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e $f : H \to H$ uma função sobrejetora tal que $(f(u), f(v)) = (u, v)$. Mostre que

i. A função f é bijetora.
ii. $(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = (u, v)$.
iii. $(f(u), v) = (u, f^{-1}(v))$.
iv. f é linear e, portanto, um operador unitário.

Exercício 26. Sejam $(E, (.,.))$ um espaço com produto interno e $T : E \to E$ uma transformação linear. Prove que $T : E \to E$ é uma transformação linear unitária se, e somente se, valem as seguintes propriedades:

i. T é bijetora.
ii. $\|Tu\| = \|u\|$, para todo $u \in E$.

(Dica: Use as identidades de polarização do exercício 3).

Exercício 27. Seja E um espaço com produto interno e $T, S : E \to E$ operadores autoadjuntos limitados.

i. Mostre que TS é autoadjunto se, e somente se, $TS = ST$.
ii. Mostre que se T for invertível e $T^{-1} : E \to E$ for limitado, então T^{-1} também é autoadjunto.

Exercício 28. Seja E um espaço com produto interno. Mostre que se $T, S : E \to E$ são unitários, então TS e T^{-1} também são unitários.

Exercício 29. Seja E um espaço vetorial e $T : E \to E$ um operador unitário. Mostre que nessas condições, as seguintes propriedades são equivalentes:

Propriedade 1) $T^2 = I$, em que $I : E \to E$ é a identidade ($Iu = u$, para todo $u \in E$).

Propriedade 2) T é autoadjunto.

Exercício 30. Considere o operador $H : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}); \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})\}$, definido como

$$Hf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

em que $g(\xi) = 1$, se $\xi \geq 0$, e $g(\xi) = -1$, se $\xi < 0$. Lembre-se que $\hat{f} = \mathcal{F}f$. Mostre que existe uma única extensão de H como um operador unitário autoadjunto em $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Este operador é chamado de *transformada de Hilbert* e aparece em análise harmônica, por exemplo.

Exercício 31. Pode-se mostrar que a transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ é dada por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx,$$

sempre que f pertencer a $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

i. Usando este fato, calcule a transformada de Fourier da função χ_a, definida como a função dada por $\chi_a(x) = 1$, se $|x| \leq a$, e $\chi_a(x) = 0$, se $|x| > a$, em que $a > 0$ é fixo.

ii. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(ax)\mathrm{sen}(bx)}{x^2} dx = \pi \min\{a, b\}.$$

(Dica: $\mathcal{F}$ é unitária).

Exercício 32. Para cada uma das transformações lineares abaixo verifique que $(Tu, Tv) = (u, v)$, para todo u, v. Quais são operadores unitários?

i. $T : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ dado por $Tf(t) = f(t-1)$ se $t \geq 1$ e $Tf(t) = 0$ se $t \in [0, 1[$.

ii. $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por $Tf(t) = f(t-1)$.

iii. $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ dado por $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$.

Exercício 33. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador linear limitado.

i. Mostre que para cada $v \in H$ fixo, a função $u \in H \mapsto (Tu, v)$ é um funcional linear.

ii. Conclua que existe um único $w \in H$ tal que $(Tu, v) = (u, w)$ para todo $u \in H$. (Dica: Use o Teorema de Riesz-Fischer).

Vamos definir a função $T^* : H \to H$ que associa a cada $v \in H$ o único elemento $w \in H$ tal que $(Tu, v) = (u, w)$, para todo $u \in H$. Ou seja, defina $T^*v = w$.

iii. Mostre que T^* é linear, contínua e é tal que $(Tu, v) = (u, T^*v)$ para todo $u, v \in H$.

O operador T^* é chamado de *operador adjunto de* T.

Exercício 34. Seja H um espaço de Hilbert real e $T, S : H \to H$ operadores lineares limitados.

i. Mostre que $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Mostre que $(T^*)^* = T$.

iii. Mostre que $(TS)^* = S^*T^*$.

iv. Mostre que $I^* = I$, em que I é a identidade.

v. Mostre que se T for bijetora com inversa contínua, então $T^* : H \to H$ também é bijetora com inversa contínua e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Exercício 35. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador linear limitado.

i. Mostre que T é autoadjunto se, e somente se, $T = T^*$.

ii. Mostre que T é unitário se, e somente se, T é inversível e $T^{-1} = T^*$.

iii. Mostre que T é uma projeção ortogonal se, e somente se, $T^2 = T$ e $T = T^*$.

Exercício 36. Seja H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador limitado. Seja $B : H \times H \to \mathbb{R}$ a função dada por $B(u, v) = (Tu, v)$.

i. Mostre que B é bilinear contínua.

ii. Mostre que B é coerciva se, e somente se, existir $C > 0$ tal que $(Tu, u) \geq C$, para todo $\|u\| = 1$.
iii. Por Lax-Milgram, se B for coerciva, existe um único operador linear limitado e bijetor $S : H \to H$ tal que $B(u, v) = (u, Sv)$. Esse operador foi estudado nos exercícios anteriores. Quem é ele?

Exercício 37. Seja $H = l_2(\mathbb{N})$ o espaço real das sequências em $\mathbb{R}$ de quadrado integrável e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < 1$.
i. Mostre que $L : l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ dado por $L(\alpha_1, \alpha_2, ...) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \alpha_j$ é um funcional linear contínuo.
ii. Ache $v \in l_2(\mathbb{N})$ tal que $(u, v) = Lu$ para todo $u \in l_2(\mathbb{N})$ e calcule a norma $\|L\|_{H^*}$.

Exercício 38. Mostre que não existe nenhum funcional linear contínuo $L : L^2(-1, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $L(f) = f'(0)$, para todo $f \in C^1([-1, 1])$.

Exercício 39. Ache a derivada fraca da função $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Exercício 40. Mostre que se $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ for uma partição de $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for uma função contínua tal que $f|_{t_i}^{t_{i+1}} \in H^1(t_i, t_{i+1})$, para todo $i \in \{0, ..., N - 1\}$, então $f \in H^1(a, b)$. Determine a derivada fraca de f.
(Dica: Se $v \in C_c^1(]a, b[)$, então $\int_a^b fv'dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} fv'dx$. Use derivação por partes.)

Exercício 41. Mostre que se $f \in H^1(a, b)$, então

$$|f(t) - f(s)| \leq \|f'\|_{L^2(a,b)} |t - s|^{1/2},$$

ou seja, f é Hölder contínua. Mostre também que se $s \in]a, b[$, então

$$\lim_{t \to s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^{1/2}} = 0.$$

Exercício 42. Seja $\lambda > 0$, $A, B \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(a, b)$. Mostre que existe uma única função $u \in H^2(a, b)$ que resolve o problema abaixo:

$$\lambda u - u'' = f,\ x \in]a, b[,$$
$$u'(a) = A, \quad u'(b) = B.$$

Exercício 43. Seja $f \in H^2(a, b)$.
i. Mostre que $f'' = 0$ se, e somente se, existe c_0 e $c_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = c_0 + c_1 x$.
ii. Mostre que $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - y) f''(y) dy$.

Exercício 44. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$, mostre que $H^m(a, b)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno:

$$(u, v)_{H^m(a,b)} = \sum_{j=0}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(a,b)}.$$

Mostre que $H^{k+1}(a, b) \subset C^k([a, b])$, $k \geq 1$, usando indução em k. Note que $C^0([a, b]) = C([a, b])$.
Mostre, também por indução, que se $u \in H^k(a, b)$, $k \geq 0$, então $u \in C^k([a, b])$ se, e somente se, $u^{(k)} \in C([a, b])$. (O caso $k = 0$ é trivial).

Exercício 45. Dado $f \in L^2(a, b)$, mostre que existe uma única função $u \in H^2(a, b)$ que resolve o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a, b[, \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{aligned} \tag{0.1}$$

em que $p \in C^1([a, b])$, $q, r \in C([a, b])$ e existem constantes reais α e β tais que $0 < \beta < \alpha$, $p(x) \geq \alpha$ e $q(x)^2 < 4\beta r(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Exercício 46. (Problema com condições de contorno mistas) Sejam $p \in C^1([a,b])$ e $r \in C([a,b])$ com $r \geq 0$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$, e seja $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$-(p(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[,$$
$$u(a) = u'(b) = 0.$$

i. Seja $H_0^1(a,b] = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = 0\}$. Mostre que $H_0^1(a,b]$ é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de $H^1(a,b)$.

ii. Mostre que vale a desigualdade de Poincaré para $H_0^1(a,b]$. (Dica: A prova é a mesma que vimos em sala de aula!)

iii. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H_0^1(a,b]$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(a,b],$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

iv. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(a,b]$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

v. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno mistas e é solução do problema.

Exercício 47. (Problema com condições de contorno periódicas) Sejam $p \in C^1([a,b])$ e $r \in C([a,b])$ com $p(a) = p(b)$. Suponha que exista $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ e $r(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$, e seja $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$-(p(x)u'(x))' + r(x)u(x) = f(x),\ x \in]a,b[,$$
$$u(a) = u(b), u'(a) = u'(b).$$

i. Seja $H_{per}^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b)\}$. Mostre que $H_{per}^1(a,b)$ é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de $H^1(a,b)$.

ii. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H_{per}^1(a,b)$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_{per}^1(a,b),$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x)dx, \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

iii. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H_{per}^1(a,b)$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

iv. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno periódicas e é solução do problema.

Exercício 48. (Problema com condições de contorno de Robin) Sejam $\beta_0, \beta_1 \geq 0$, $\lambda > 0$ e $f \in L^2(a,b)$. O objetivo é mostrar que existe uma única função $u \in H^2(a,b)$ tal que

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x),\ x \in]a,b[,$$
$$-u'(a) + \beta_0 u(a) = 0, u'(b) + \beta_1 u(b) = 0.$$

i. Mostre que se $u \in H^2(a,b)$ for solução do problema, então $u \in H^1(a,b)$ e u é solução fraca do problema, ou seja, u satisfaz:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H^1(a,b),$$

em que

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)dx + \beta_1 u(b)v(b) + \beta_0 u(a)v(a), \quad F(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

ii. Mostre que existe uma única solução fraca $u \in H^1(a,b)$ do problema. (Dica: Mostre que a é contínua, bilinear e coerciva e F é linear e contínua).

iii. Mostre que a solução fraca do problema pertence a $H^2(a,b)$, satisfaz as condições de contorno mistas e é solução do problema.

Exercício 49. (Problemas com condições Dirichlet/Robin)

i. $\int_0^1 u(x)^2 dx \leq 2 \left(u(0)^2 + \int_0^1 u'(x)^2 dx \right)$ para todo $u \in H^1(a,b)$.

ii. Seja $\alpha > 0$, mostre que $a : H^1(0,1) \times H^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $a(u,v) = \alpha u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ define uma função bilinear, contínua e coerciva.

iii. Seja $\alpha > 0$ e $f \in L^2(0,1)$. Mostre que existe uma única função $u \in H^2(0,1)$ que satisfaz

$$-u''(x) = f(x),\ x \in]0,1[,$$
$$-u'(0) + \alpha u(0) = 0, u'(1) = 0.$$