ANÁLISE HARMÔNICA

Motivação

- Aproximação de funções periódicas por funções trigonométricas / Séries de Fourier truncadas ...
- (decomposição das funções em seus diferentes harmônicos)
- Análise de sinais / séries temporais / ...
- Aplicações Diversas: Filtragem / Compressão de ondas (eletromagnéticas, acústicas, sísmicas, ...)
- Resolução de Equações a derivadas parciais
- FFT

CASO CONTÍNUO

Consideramos inicialmente a aproximação de funções 2π-periódicas por combinações lineares das funções $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), ..., \cos(nx)$, $\sin(nx)$ pelo método de mínimos quadrados, com o produto interno definido como $< f(x), g(x) >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx$.

Observação: devido à periodicidade das funções em questão o produto interno acima pode ser calculado tomando-se qualquer intervalo de comprimento 2π. Em particular, muitas vezes é conveniente defini-lo com a integral de $-\pi$ a π, para explorar características de paridade das funções.

As funções trigonométricas acima, formam um conjunto ortogonal de funções em relação ao produto interno dado, o que torna a matriz do sistema normal diagonal. Verifiquemos este fato. Para a integração de produtos de elementos da base, usaremos as relações trigonométricas:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2}$$

Assim temos, para $n, m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x\ dx \\
= \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_0^{2\pi} &= 0 \text{ se } n \neq m\ (= \pi \text{ se } n = m) \\
\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x\ dx \\
= \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_0^{2\pi} &= 0 \text{ se } n \neq m\ (= \pi \text{ se } n = m) \\
\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x + \sin(n+m)x\ dx \\
= \left(-\frac{\cos(n-m)x}{n-m} + \frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_0^{2\pi} &= 0\ .
\end{aligned}$$

Nos casos em que $n = m$, temos que $\cos(n-m)x = 1$ e $\sin(n-m)x = 0$, e não usamos suas primitivas na forma acima. Temos ainda que:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\ dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\ dx = 0 \ \text{ e } \ \int_0^{2\pi} 1\ dx = 2\pi\ .$$

Como a base é ortogonal, a aproximação da função 2π-periódica $f(x)$ é dada por:

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\ ,$$

com os seguintes coeficientes

$$a_0 = \frac{< f(x), 1 >}{2\pi}\ , \quad a_k = \frac{< f(x), \cos(kx) >}{\pi}\ , \quad \text{e} \ \ b_k = \frac{< f(x), \sin(kx) >}{\pi}\ .$$

O chamado **harmônico de ordem** k da aproximação de $f(x)$ é dado pelo termo:

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \ ,$$

que também pode ser expresso na forma

$$A_k \cos(kx + \varphi_k) \ ,$$

onde A_k é a amplitude do harmônico e φ_k seu ângulo de fase. Estes se relacionam com os coeficientes da expansão da seguinte forma. Como,

$$A_k \cos(kx + \varphi_k) = A_k \cos(\varphi_k) \cos(kx) - A_k \sin(\varphi_k) \sin(kx) \ ,$$

temos que $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$ e $b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$. Por outro lado, se conhecemos a_k e b_k, obtemos a amplitude e a fase através das relações:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \ \ \text{e} \quad \varphi_k = atan(-b_k/a_k) \ .$$

Observação: No caso de uma função $f(t)$ que seja P-periódica, podemos fazer sua análise harmônica usando a mudança de variável $t = \frac{Px}{2\pi}$ e definindo $F(x) = f(Px/(2\pi))$, função 2π-periódica. Calcula-se então os coeficientes da aproximação de $F(x)$ como descrito. A aproximação para $f(t)$ terá os mesmos coeficientes e será dada por:

$$g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2k\pi t/P) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k\pi t/P) \ .$$

Equivalentemente, podemos diretamente calcular os coeficientes através das relações:

$$a_0 = \frac{< f(t), 1 >}{P} \ , \quad a_k = 2\frac{< f(t), \cos(2k\pi t/P) >}{P} \ , \quad \text{e} \ \ b_k = 2\frac{< f(t), \sin(2k\pi t/P) >}{P} \ ,$$

com o produto interno $< f, g >= \int_0^P f(t)g(t) \ dt$. Se preferirmos, podemos ainda escrever estas relações usando o meio-período $L = P/2$:

$$a_0 = \frac{< f(t), 1 >}{2L} \ , \quad a_k = \frac{< f(t), \cos(k\pi t/L) >}{L} \ , \quad \text{e} \ \ b_k = \frac{< f(t), \sin(k\pi t/L) >}{L} \ ,$$

ANÁLISE HARMÔNICA - O CASO DISCRETO

Consideremos uma função $F(x)$ 2π-periódica tabelada em $2N$ pontos uniformemente espaçados em $[0, 2\pi]$. Denotamos os pontos por $x_j = j\pi/N$, $j = 0, 1, .., 2N-1$. Neste caso o produto interno é definido como:

$$< f(x), g(x) >= \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)g(x_j) \ .$$

Verifiquemos que as funções trigonométricas $1, \cos(x), ..., \cos(Nx), \sin(x), ..,$ $\sin((N-1)x)$ são ortogonais em relação a este produto interno. Para tanto, vamos inicialmente mostrar que

$$< 1, \cos(kx) >=< 1, \sin(kx) >= 0 \ .$$

Relembrando que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (com $i = \sqrt{-1}$) basta estabelecer que

$$\sum_{j=0}^{2N-1} e^{ikx_j} = 0,$$

sendo que a parte real desta soma é $< 1, \cos(kx) >$ e a parte imaginária $< 1, \sin(kx) >$. Desta forma, estabelecemos as duas igualdades simultaneamente. Vejamos:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} e^{ikx_j} = \sum_{j=0}^{2N-1} e^{ikj\pi/N} = (1 + e^{ik\pi/N} + (e^{ik\pi/N})^2 + ... + (e^{ik\pi/N})^{2N-1}),$$

que é uma soma de PG com razão $e^{ik\pi/N}$. Logo,

$$\sum_{j=0}^{2N-1} e^{ikx_j} = \frac{1-(e^{ik\pi/N})^{2N}}{1-e^{ik\pi/N}} = \frac{1-e^{i2k\pi}}{1-e^{ik\pi/N}} = 0 \ .$$

O resultado é válido para $1 \leq |k| \leq 2N-1$, pois então o denominador é não nulo.

A partir destas relações, usando as mesmas relações trigonométricas empregadas no caso contínuo, vamos estabelecer a ortogonalidade das funções trigonométricas do conjunto dado acima. Temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2N-1} \cos(nx_j)\cos(mx_j)\ dx &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos(n-m)x_j + \cos(n+m)x_j = 0 \\
\sum_{j=0}^{2N-1} \sin(nx_j)\sin(mx_j)\ dx &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos(n-m)x_j - \cos(n+m)x_j = 0 \\
\sum_{j=0}^{2N-1} \sin(nx_j)\cos(mx_j)\ dx &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \sin(n-m)x_j + \sin(n+m)x_j = 0\ .
\end{aligned}$$

Se $n \neq m$ temos que $1 \leq |n+m| \leq 2N-1$ e $1 \leq |n-m| \leq 2N-1$ e portanto obtemos as ortogonalidades desejadas. Além disso:

$$< 1, 1 >= 2N, \quad , < \sin(kx), \sin(kx) >= N \ \text{ e } \quad < \cos(kx), \cos(kx) >= N\ ,$$

para todo $k = 1, .., N-1$ e $< \cos(Nx), \cos(Nx) >= 2N$.

Portanto, a expansão de $F(x)$ em seus harmônicos é dada por

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin(kx)\ , \tag{1}$$

com os coeficientes

$$a_0 = \frac{< F(x), 1 >}{2N}, \quad a_k = \frac{< F(x), \cos(kx) >}{N}, \quad b_k = \frac{< F(x), \sin(kx) >}{N},$$

$$k = 1, \ldots, N-1 \ \text{ e } \quad a_N = \frac{< F(x), \cos(Nx) >}{2N}\ .$$

O espaço de funções definidas nos pontos x_j, $j = 0, ..., 2N-1$ tem dimensão $2N$. Como as $2N$ funções que usamos em aproximações de tais funções são não nulas e ortogonais, elas formam uma base deste espaço. Isto significa que temos uma correspondência biunívuca entre os valores de uma função na malha e os coeficientes de sua expansão nos harmônicos. Dados os $2N$ coeficientes fica determinda uma única função definida na malha de pontos pela expressão (1) e vice-versa, dada a função definida na malha seus coeficientes se determinam unicamente. Observemos que a função $\sin(Nx)$ é identicamente nula nos pontos x_j e que frequências mais altas, irão coincidir com frequências mais baixas quando restritas aos pontos da malha. Isto significa que não podemos representar frequências mais altas com uma amostragem de valores restrita a essa quantidade de pontos.

A representação das funções em seus harmônicos é uma decomposição da função em diferentes frequências. Conhecendo esta decomposição, podemos por exemplo filtrar algumas frequências, simplesmente zerando seus coeficientes, e depois recompondo a função através da expansão (1), com os coeficientes alterados.

Como exemplo, vamos considerar a função tabelada a seguir (com $2N = 8$ pontos). Colocamos também os valores das funções trigonométricas na tabela. Observe que são ortogonais.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
$F(x)$	3	1	-2	1	0	-1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
$\sin(x)$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$\cos(3x)$	1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
$\sin(3x)$	0	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}/2$
$\cos(4x)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Podemos então avaliar os coeficientes da expansão de $F(x)$:

$$a_0 =< F, 1 > /8 = 5/8, \quad a_1 =< F, \cos(x) >= 3(1 + \sqrt{2}/2)/4,$$
$$b_1 = (-3 + \sqrt{2}/2)/4, \quad a_2 = 5/4, \quad b_2 = -3,$$
$$a_3 = 3(1 - \sqrt{2}/2)/4, \quad b_3 = (3 + \sqrt{2}/2)/4 \ \text{ e } \ a_4 = -1/8 \ .$$

Poderíamos então, por exemplo, filtrar as frequências de ordem 3 e 4 de F (este seria um filtro denominado de passa baixa; pelo filtro passam as frequências mais baixas e são eliminadas as altas), levando a uma nova função, sem estas frequências, dada por $\tilde{F}(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)$. Tal procedimento poderia, por exemplo, ser utilizado para a remoção de ruídos de sinais sonoros. Observamos novamente que em nosso exemplo, o espaçamento entre os pontos é igual a π/N. Caso o espaçamento entre os pontos x_j fosse igual a h, teríamos $P = 2Nh$. Podemos então proceder como no caso contínuo, através de uma mudança de variáveis.

AS TRANSFORMADAS DISCRETAS DE FOURIER

Como mencionado antes, a partir dos $2N$ valores da função F:

$$F(x_0), F(x_1), \ldots, F(x_{2N-1}) \ ,$$

podemos determinar os coeficientes

$$a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_{N-1}$$

avaliando os produtos $< F(x), 1 >$, $< F(x), \cos(kx) >$ e $< F(x), \sin(kx) >$. O cálculo de cada um destes produtos internos requer $2N$ multiplicações e adições. Como temos que avaliar $2N$ produtos, a obtenção dos coeficientes da expansão de Fourier de F irá requerer da ordem de $O(N^2)$ operações. Por outro lado, se tivermos os coeficientes da expansão de F (conforme (1)) podemos avaliar o valor de $F(x_j)$ com $2N$ multiplicações e adições. Portanto, para ter os valores de F na malha (com $2N$ pontos) também necessitaríamos da ordem de $O(N^2)$ operações.

A obtenção dos coeficientes a partir dos valores de F na malha é denominada **transformada direta de Fourier** e os valores de F na malha são obtidos a partir de seus coeficientes pela **transformada inversa de Fourier**.

Em 1965, Cooley e Tukey apresentaram um algoritmo para a **transformada rápida de Fourier (FFT - fast Fourier transform)** combinando operações de forma a reduzir o trabalho computacional requerido para $O(N\log N)$ operações.

Veja `https://en.wikipedia.org/wiki/Cooley-Tukey_FFT_algorithm` para um pouco da história, descrição de variações do algoritmo e mais referências. Apesar da ideia do método remontar a Gauss, foi o algoritmo apresentado por Cooley-Tukey que revelou todo seu potencial, tendo viabilizado o uso das transformadas em inúmeras aplicações de forma eficiente. Na biblioteca Scipy do Python, há várias versões da transformada. Experimentem!