

Capítulo 4

RELAÇÕES ENTRE O DESENVOLVIMENTO DA ESTRUTURA NUMÉRICA E DAS ESTRUTURAS LÓGICAS DE CLASSIFICAÇÃO E SERIAÇÃO

Um dos conceitos fundamentais de toda a Matemática e da própria formação do pensamento lógico-matemático é o da *relação*. É na medida em que o sujeito se torna capaz de criar, em sua mente, relacionamentos entre objetos e coordenar tais relacionamentos que sua inteligência progride. A condição necessária para a construção do conhecimento matemático é, pois, a possibilidade do ser humano estabelecer relações lógicas, sustentadas na sua ação transformadora sobre a realidade que interage.

Importa-nos distinguir, então, que tipos de relações o sujeito pode estabelecer sobre os objetos. Neste sentido, Piaget distinguiu dois tipos de relações que se diferenciam em sua natureza: as relações *simétricas* e as *assimétricas*.

As relações simétricas são as que dão origem à formação da estrutura lógica de *classificação* e as relações assimétricas são as que constituirão a estrutura lógica de *seriação*.

O número é, pois, um novo tipo de relação que se constitui pela síntese, por assimilação recíproca, destas duas relações. Por esta razão, acreditamos ser conveniente entendermos melhor a formação das estruturas lógicas elementares¹ para então compreendermos a natureza do número.

RELAÇÕES SIMÉTRICAS E A FORMAÇÃO DA ESTRUTURA DE CLASSIFICAÇÃO

As relações simétricas são as que utilizamos ao relacionarmos objetos em função de suas *semelhanças*, aproximando-os, ao mesmo tempo que os separamos de outros que

¹ — Estruturas lógicas elementares: classificação e seriação.

deles diferem. Chamamos estas relações de *simétricas*, pois o mesmo motivo que leva a aproximar um elemento *a* de outro elemento *b* faz aproximar o elemento *b* de *a*. Por exemplo, se aproximarmos dois elementos por possuírem a mesma cor, tem-se que: “Se *a* tem a mesma cor que *b*, *b* tem a mesma cor de *a*”. Assim, o sentido da aproximação pode ser tanto de *a* para *b*, como de *b* para *a*.

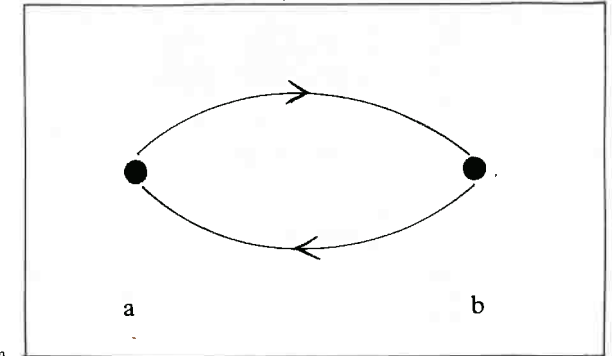


Figura 4.1 — Relação simétrica.

São estas relações aplicadas sobre os objetos pelas crianças, desde as muito pequenas, que estão na origem da estrutura de classificação. Classificar é agrupar objetos de um dado universo, reunindo todos os que se parecem num determinado valor de um atributo, separando-os dos que deles se distinguem neste mesmo atributo.

Piaget anuncia que a classe operatória só é possível quando o sujeito consegue realizar em sua mente uma assimilação recíproca entre os dois caracteres que a definem, ou seja, entre a compreensão (aspecto qualitativo da classe) e a extensão (aspecto quantitativo da classe).

Esta síntese inicia quando a criança consegue coordenar a relação de semelhança pensada (compreensão), estendendo a *todos* os objetos aos quais ela pode ser aplicada, ao mesmo tempo que os separa dos outros aos quais tal relação não é aplicável. A síntese, então, se consolida quando a criança postula a assimilação recíproca entre a extensão e a compreensão da classe, sendo capaz de compreender que *todos os objetos agrupados são alguns dentre os objetos da totalidade a que pertencem*.

Por exemplo, pensando nas espécies de frutas, uma criança, ao separar de um cesto todas as laranjas (L) das outras frutas que não são laranjas (L'), terá atingido esta síntese recíproca entre a compreensão (ser ou não laranja; ser ou não fruta) e a extensão (aplicação dos quantificadores *todos* e *alguns*), se for capaz de conceber em sua mente a complementaridade e principalmente a inclusão (expressas no quadro a seguir) inferindo as seguintes conclusões.

O NÍVEL DAS COLEÇÕES FIGURAIS

Esta estrutura, porém, leva muitos anos para se constituir na mente da criança (7-8 anos em média). Inicialmente, num nível pré-operatório à constituição da estrutura de classificação (que Piaget caracteriza como o nível das Coleções Figurais), as crianças são incapazes de tal coordenação. Assim, ora

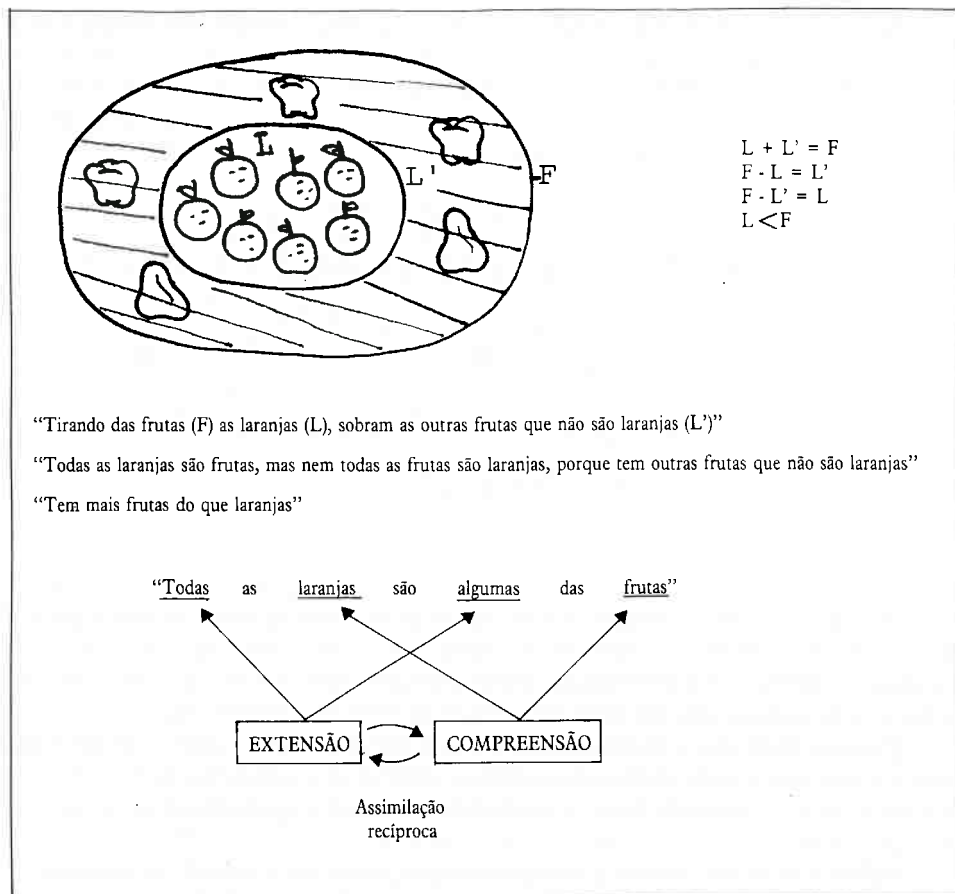


Figura 4.2 — A classe operatória: síntese entre os dois caracteres: compreensão e extensão.

o seu pensamento privilegia a compreensão da classe, negligenciando a extensão, ora o contrário. A criança oscila entre duas condutas básicas.

Numa primeira conduta, faz aproximações e separações entre objetos, dois a dois, em função de serem semelhantes na cor ou na forma, ou na espécie, etc. É incapaz, porém, de estender esta aproximação a todos os objetos aos quais a relação pensada se aplicaria.

A conseqüência disto é que ela prossegue os seus “agrupamentos” fazendo alternância nos critérios pensados. É muito comum crianças pequenas realizarem alinhamentos contínuos ou descontínuos com objetos que possuem diferentes atributos como: cor, forma, tamanho, etc. Nestes alinhamentos, observa-se que ela aproxima sempre um objeto de cada vez, ligando-o apenas ao último da série e não a todos já dispostos. Verifica-se que para cada ligação existe uma “pesquisa” de semelhança deste último elemento com o próximo a ser colocado. O problema é que ora o dado perceptivo da cor é para

ela mais forte, ora o da forma, ora o do tamanho, e a série é constituída pela alternância destes atributos.

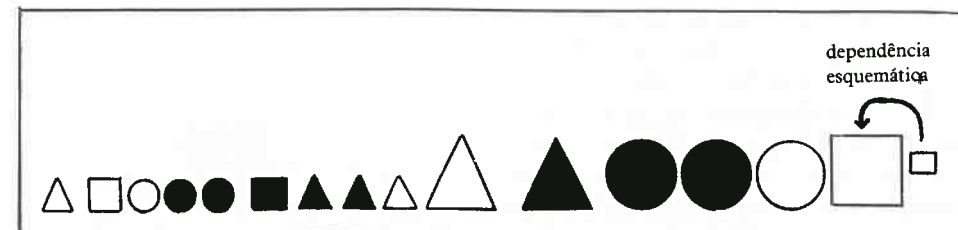


Figura 4.3 — Conduta das coleções figurais: alinhamentos com predomínio da compreensão da classe.

Piaget nos diz que nesta conduta um elemento faz parte do alinhamento por “dependência esquemática”, ou seja, por uma ligação (dependência) deste elemento a outro elemento em função de um esquema de semelhança.

Uma outra conduta deste nível é a de fazer aproximações entre objetos não por semelhanças comuns, como por terem a mesma cor, ou a mesma forma, etc., mas pela “conveniência” de tal aproximação, tendo em vista a constituição de uma figura, de um objeto ou de um cenário. É assim que aproxima um triângulo de um quadrado para formar uma casa e, a estes, é aproximado um retângulo e, posteriormente, círculos para a constituição de uma árvore que fica ao lado da casa.

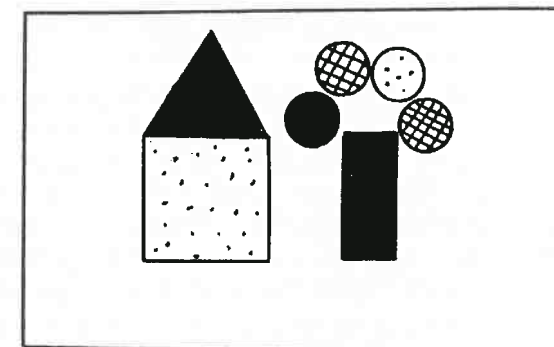


Figura 4.4 — Conduta das coleções figurais: constituição de totalidades com predomínio da extensão da classe.

Neste caso, cada elemento faz parte do agrupamento por uma *pertença partitiva*, isto é, o quadrado pertence ao cenário constituído (totalidade) por ser uma de suas partes. A idéia de totalidade (todos) está presente, enquanto que as relações de semelhanças entre os objetos estão ausentes. Assim, existe predomínio da extensão sobre a compreensão e novamente a ausência da coordenação entre estes dois caracteres.

Do mesmo modo, se apresentássemos para uma criança desta fase vários cartões com desenhos, ela iria aproximá-los em função de sua conveniência utilitária. Por exemplo, aproximaria um nenê de um berço e de uma mamadeira; e uma senhora de uma panela e de uma mesa, justificando: “O nenê dorme no berço e toma mamadeira, a mãe faz a comida e a coloca na mesa”. Novamente, ocorrem as pertenças partitivas presas às configurações espaciais e aos dados perceptivos empíricos (relacionados às experi-

ências da vida infantil). Nesta fase, a criança não separaria os cartões formando categorias do tipo: pessoas/móveis/utensílios, o que explicitaria o início da síntese entre a extensão e a compreensão da classe.

Como já foi abordado, neste nível das coleções figurais as crianças frequentemente oscilam de uma das condutas para outra, ou seja, das dependências esquemáticas expressas em alinhamentos por alternância de critério para as pertencas partitivas expressas na constituição de totalidades — objetos ou figuras, e vice-versa. Assim, ao darmos blocos de madeira coloridos para uma criança e propusermos: “Vamos arrumar os blocos juntando as peças que se parecem”, ela poderá fazê-lo tanto por uma conduta como por outra. Por exemplo, poderá constituir o seguinte arranjo com as peças:

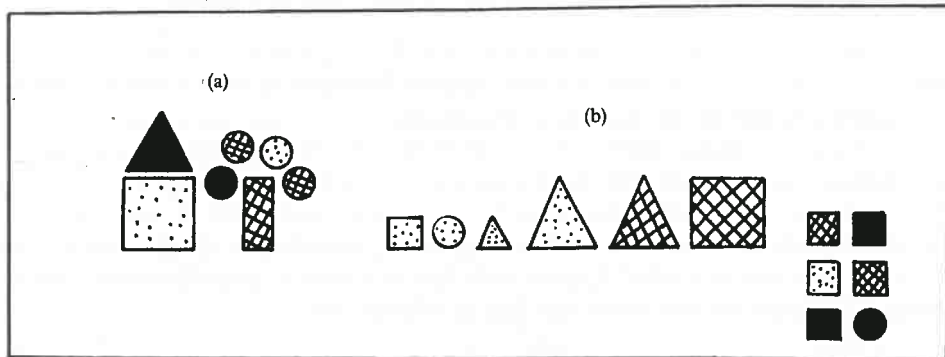


Figura 4.5 — Condutas da fase das coleções figurais: nível pré-operatório.

Neste caso, em (a) aproximou os objetos em função de sua conveniência com vistas à constituição de uma totalidade figural (pertencas partitivas — presença da extensão e ausência da compreensão) e em (b) aproximou um objeto a outro simultaneamente por uma semelhança comum que se alternou no decorrer da constituição do alinhamento (dependência esquemática — presença da compreensão e ausência da extensão). A criança deste nível não necessariamente ocupa todos os blocos que lhe são oferecidos, deixando, assim, alguns fora de seu arranjo como objetos “não classificáveis”.

Mesmo que iniciemos por esta criança uma subdivisão de tais peças, colocando-as em caixas conforme um atributo que lhes seja comum, ela não consegue descobrir tal atributo para prosseguir colocando os outros objetos nas caixas. Por exemplo, se iniciássemos a subdivisão do material pela cor e lhe propuséssemos: “Será que descobres no que eu pensei para separar os blocos assim? O que eles têm de iguais? Por que ficaram juntos em cada caixa?... Sabes continuar colocando os outros parecidos que faltam?” (Ver figura 4.6).

Ao prosseguir a colocação dos elementos na caixa, a criança o faria ligando cada elemento de fora com outro de dentro, por dependência esquemática, ou seja, por um esquema de semelhança elemento-elemento. Quando, então, ela se deparasse com um objeto que não tivesse correspondente igual nas caixas, ela o conceberia como não classificável ou o aproximaria de outra caixa, ligando-o, porém, a um elemento que lhe correspondesse por uma semelhança qualquer que, pelo dado perceptivo, lhe chamasse ini-

cialmente a atenção. Nesta conduta provavelmente faria uma troca no critério de classificação proposto.

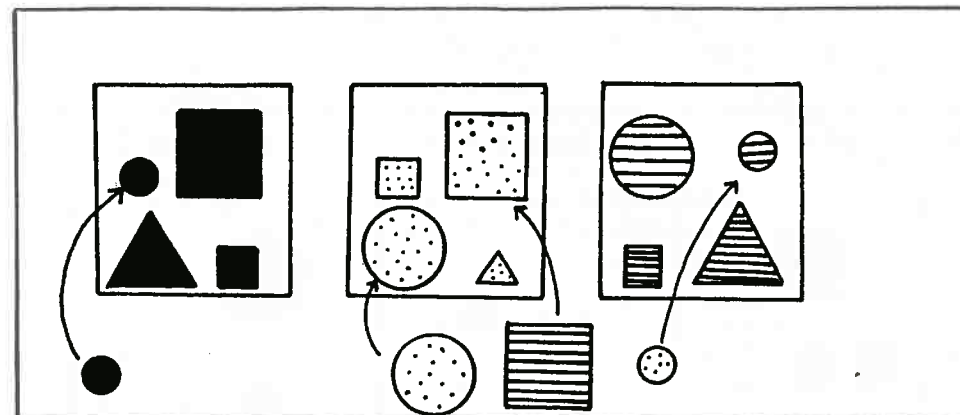


Figura 4.6 — Conduta pré-operatória: a relação de semelhança elemento-elemento e ausência da relação elemento-coleção.

A criança poderia, nestas ligações sucessivas de cada elemento de fora da caixa com um elemento de dentro, determinar de uma forma não intencional, mas ocasional, a separação conforme o critério inicialmente proposto. A questão é que não haveria antecipação pela criança de tal critério, pois a ação da criança teria sido fruto de aproximações sucessivas elemento-elemento, presas aos dados perceptivos, sem uma análise prévia que antecipasse logicamente sua conduta classificatória: explicitando melhor, ao solicitarmos a esta criança que nos dissesse por que os elementos ficaram separados desta forma nas caixas: “O que pensaste para arrumar os blocos nas caixas?... Em que se parecem os blocos desta caixa?... Por que os blocos desta caixa ficaram separados destes outros?... Qual o nome que podemos dar para cada caixa?” Ela, ao invés de enunciar que numa das caixas foram colocados os pretos, noutra os pontilhados e noutra os listrados, dirá que guardaram o quadrado, o quadradinho, a bola... observando a característica de cada elemento individualmente e não abstraído a qualidade comum que os reúne, no caso, a cor.

Muitas vezes ao insistirmos: “Diga um nome só que mostre por que todos estes estão guardados nesta caixa: ‘caixa dos...’”, a criança prossegue, “... dos misturados”. Pois, ao estabelecer a relação de semelhança dois a dois, a variação entre os elementos guardados numa caixa fica ressaltada e não a semelhança comum extensiva a todos os elementos reunidos (ausência da extensão).

O NÍVEL DAS COLEÇÕES NÃO-FIGURAIS

Mais adiante, a criança consegue resolver bem este problema, pois a compreensão e a extensão começam a se coordenar em sua mente, sem, no entanto, atingir ainda a sua síntese. É na tentativa desta coordenação que se torna possível a constituição das *coleções não-figurais*, ou seja, de coleções realizadas em função de relações de semelhança (compreensão) apli-

cadadas a todos os objetos possíveis (extensão), porém ainda favorecidas pelos dados da percepção.

Assim, ao darmos blocos de madeira à criança para que junte os que se parecem, ela já será capaz de separar todos os blocos, pensando apenas num atributo, sem a preocupação de vir a constituir objetos ou figuras com tais peças. Por exemplo, pensando na forma, poderia fazer espontaneamente as seguintes subdivisões sobre três caixas, ao lhe propormos “Como podes separar estes blocos juntando os que se parecem em cada caixa?”

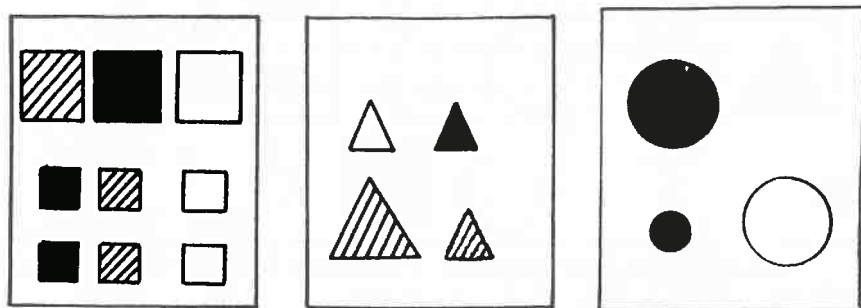


Figura 4.7 — Conduta das coleções não-figurais: a separação nas caixas por um critério de semelhança.

Além de classificar o material, ela comunica que fez a antecipação do critério: “Nesta caixa vou colocar os quadrados, nesta os triângulos e nesta os redondos”.

Inicialmente, quando as crianças estão recém ingressando nesta fase, ocorre perseverança no primeiro critério de classificação. Assim, ao propormos: “Como podes arrumar estes blocos nas três caixas, pensando num outro jeito de juntar os iguais que não seja a forma — quadrado, triângulo e redondo?” as crianças retomam o critério da forma, não postulando a variação pela cor na separação das caixas. Com os progressos da inteligência, elas se tornam capazes de postular a separação pela forma, pela cor e, neste exemplo, até pelo tamanho (ao serem propostas apenas duas caixas para guardar o material em montes que se parecem).

No entanto, neste nível, a criança ainda não consegue conceber a inclusão das partes no todo. Isto porque seu pensamento não atingiu a mobilidade necessária garantida pela reversibilidade e, portanto, não realiza a assimilação recíproca entre a compreensão e a extensão, independentemente do apoio no dado perceptivo. Agora, a criança já é capaz de realizar as *pertenças inclusivas* em substituição às dependências esquemáticas e às *pertenças partitivas*. Ou seja, já é capaz de relacionar cada elemento como pertencente ou não à coleção que, por antecipação, decidiu realizar. Por exemplo, concebe o quadrado como pertencente à classe que reúne “*só os quadrados e todos os quadrados*” (ver figura 4.7); no entanto, esta criança ainda não é capaz de estabelecer a relação simultânea desta classe dos quadrados com a de todos os blocos de madeira que a contém. Assim, se perguntarmos a ela: “O que tem mais, blocos de madeira ou quadrados?” ela nos afirmará sem hesitação: “Quadrados tem mais”. Seu “erro” decorre da incapacidade de coordenar mentalmente, independente dos dados fornecidos pela percepção, os aspectos qualitativos (compreensão) e os quantitativos da classe (extensão); consequente-

mente, não consegue pensar simultaneamente na parte e no todo, reduzindo, no caso, o todo “*blocos de madeira*” às peças que *não são quadrados*, ou seja, aos triângulos e aos círculos (ver figura 4.7).

O NÍVEL DA CLASSIFICAÇÃO OPERATÓRIA

É só mais adiante, com a reversibilidade operatória atingida, que a criança consegue se libertar dos dados da percepção e atingir a síntese da extensão e da compreensão da classe. Assim, a estrutura de classificação se consolida, e a criança passa a ser capaz de realizar inclusões hierárquicas, ou seja, de conceber classes encaixadas sucessivamente umas nas outras. Por exemplo, atingiria o entendimento de que “*todos os quadrados (A) são alguns dos Blocos de madeira (B)*, pois existem outros Blocos de madeira que não são quadrados (A’); todos os Blocos de madeira (B) são alguns dos Brinquedos de madeira (C), pois existem outros Brinquedos de madeira que não são Blocos (B’); todos os Brinquedos de madeira (C) são alguns dos Brinquedos (D), pois existem outros Brinquedos que não são de madeira (C’)”.

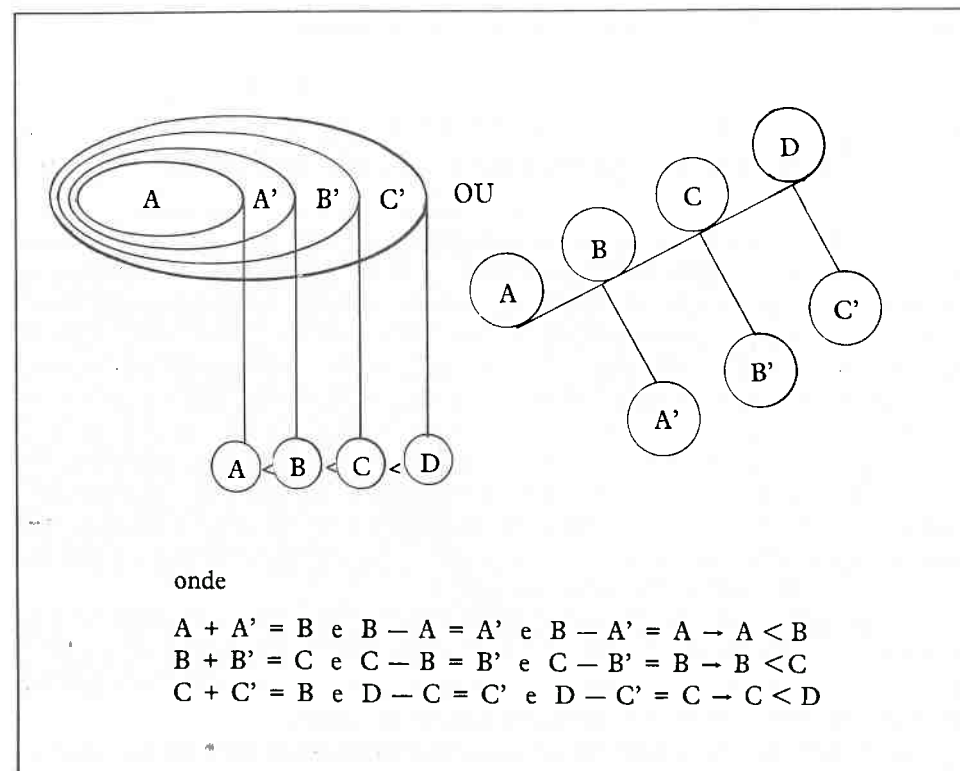


Figura 4.8 — A inclusão hierárquica da classe.

Vimos, assim, que na gênese da estrutura da classificação o sujeito evolui das ligações elemento-elemento (Coleções Figurais) para as relações de pertinência elemento-classe (Coleções Não-figurais) e, finalmente, para as relações de inclusão subclasse-classe (Classe Operatória), quando a assimilação recíproca entre os caracteres que definem a classe — a compreensão e a extensão — é atingida.

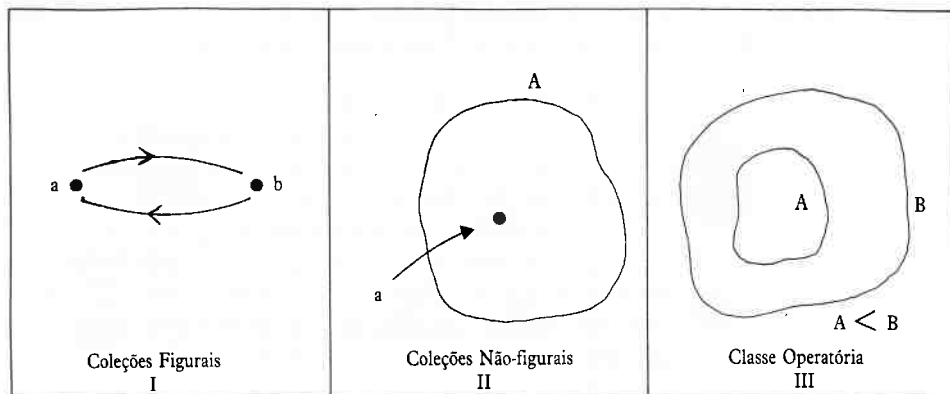


Figura 4.9 — A evolução das condutas no desenvolvimento da estrutura de classificação.

RELAÇÕES ASSIMÉTRICAS E A FORMAÇÃO DA ESTRUTURA DE SERIAÇÃO

As relações assimétricas são as que empregamos ao seriar objetos, na forma ascendente ou descendente, pelas diferenças ordenáveis de um atributo. Assim, podemos seriar objetos de uma coleção em função do atributo tamanho, colocando-os em ordem do menor para o maior (ascendente) ou do maior para o menor (descendente). Além do tamanho, outros atributos são úteis à constituição de séries. Pode-se seriar pela espessura, colocando os objetos do mais fino ao mais grosso ou vice-versa; também pode-se seriar pelo peso: do mais leve ao mais pesado; pela velocidade: do mais lento ao mais rápido; pelo volume: do mais vazio ao mais cheio; pela idade: do mais moço ao mais velho; etc.

Chamamos estas relações presentes na constituição das séries de “assimétricas”, porque o motivo que nos leva a aproximar um objeto *b* de um outro *a* colocado, por exemplo, numa série que vai do menor ao maior, é que *b* é maior do que *a* e este não é o mesmo motivo que permite aproximar *a* de *b*.

O que nos permitiu fazer a aproximação *b* para *a* numa série ascendente foi o fato de que *b* é maior do que *a* e isto não nos permite fazer a aproximação de *a* para *b*, pois *a* não é maior do que *b*; assim, a aproximação possível destes dois elementos numa série ascendente é de sentido único, ou seja, só de *b* para *a*.

Observa-se que as relações assimétricas diferem essencialmente em sua natureza das simétricas, pois, nestas, a aproximação entre dois elementos *a* e *b* é no sentido recíproco, tal que, por exemplo, se *a* tem o mesmo tamanho de *b*, *b* tem o mesmo tamanho de *a*.

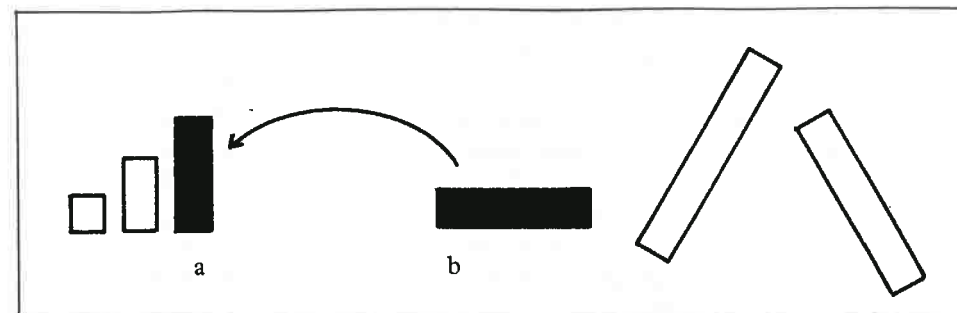


Figura 4.10 — Relação assimétrica: “b é maior do que a”.

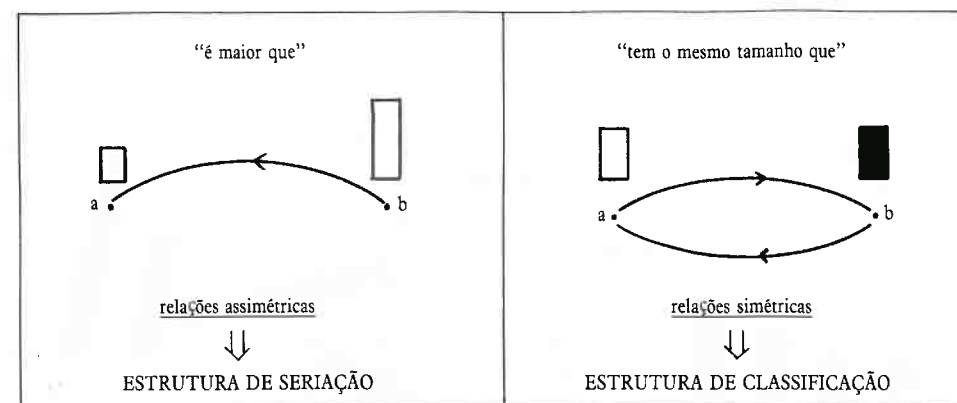


Figura 4.11 — A diferenciação entre as relações simétricas e assimétricas.

Apesar de, em sua natureza, estas relações serem diferenciadas, em sua gênese são semelhantes, ou seja, o desenvolvimento destas estruturas obedece a estágios equivalentes, ocorrendo em épocas mais ou menos semelhantes.

Observamos, então, crianças muito pequenas já envolvidas com a construção de torres com objetos de tamanho diferente, colocando na base um maior para sustentar os próximos (ordem descendente). Também é comum observá-las atribuindo uma correspondência ordinal entre duas coleções de objetos com dois, três e até quatro tamanhos diferentes. Por exemplo, ao pegar uma laranja grande e outra pequena, a criança evoca: “A mamãe e o nenê”. O mesmo faz ao brincar com três bonecos de tamanhos diferentes: “O papai, a mamãe e o nenê”.

Outro exemplo é vê-las em tentativas de colocar recipientes de tamanhos diferentes uns dentro dos outros, buscando encaixá-los sucessivamente. São todas ações que refletem os esquemas de aproximação entre os objetos que constituirão, no futuro, estrutura lógica de seriação.

O NÍVEL PRÉ-OPERATÓRIO (FASE I)

Assim, no nível pré-operatório à formação desta estrutura, se apresentarmos à criança dez bastões de tamanhos diferentes, cuja diferença seja muito pequena ao dado perceptivo (6mm), e lhe propusermos que forme uma escada com tais bastões,

ela será incapaz de concluir tal escada, mesmo que a tenhamos iniciado pela colocação dos três ou quatro bastões iniciais. Esta incapacidade da criança se justifica porque não consegue relacionar o próximo bastão a ser colocado como, ao mesmo tempo, sendo maior do que os já presentes na série e também sendo menor do que todos os que restam. Assim, ela aproxima ao último bastão um qualquer que seja, garantido pelo dado perceptivo, suficientemente maior do que este último e não necessariamente o menor dos que restavam. Com isto, não consegue concluir a série ascendente, utilizando todos os dez bastões. Pode fazer, então, duplas, trincas ou quartetos, porém não coordenados entre si.

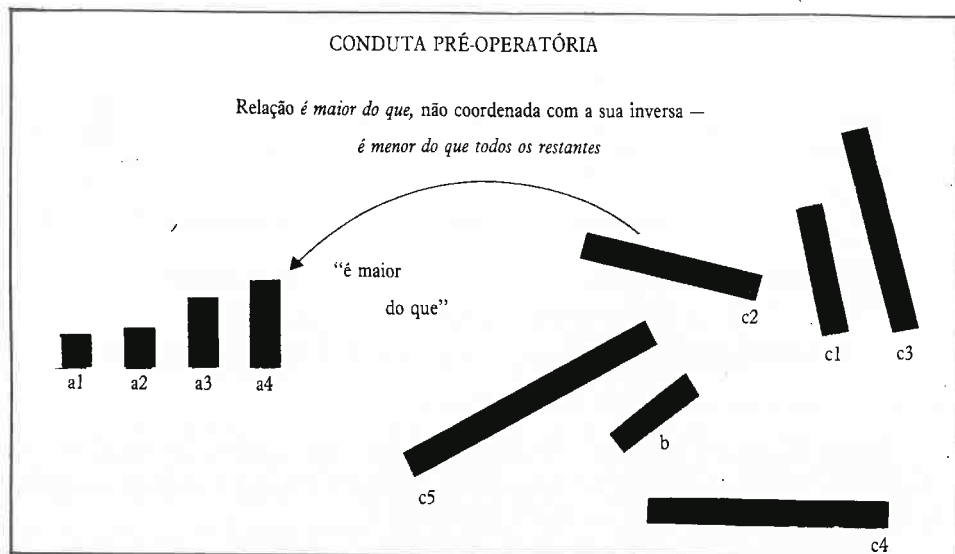


Figura 4.12 — A conduta do nível pré-operatório: ausência da série.

Ainda que encorajemos a criança a reavaliar sua série, no sentido de vir a trocar elementos de lugar para que “na escada só se ande para cima, subindo nos degraus sem descer”, ela não consegue ter êxito em suas trocas, mesmo após várias tentativas, porque comete incessantemente o mesmo erro, ou seja, não coordena reciprocamente as relações *maior do que* e *menor do que*.

A criança só terá êxito na escolha do elemento *b* como o próximo a ser colocado na série se fizer sucessivamente as seguintes relações coordenadas em sua mente: *b* é maior do que *a* e *b* é menor do que qualquer *c* restante.

A SÉRIE INTUITIVA (FASE II)

É para a busca da consolidação desta coordenação (da relação assimétrica empregada e de sua inversa) que as ações das crianças irão se direcionar nas próximas fases do desenvolvimento da estrutura de seriação. No estágio semi-operatório à consti-

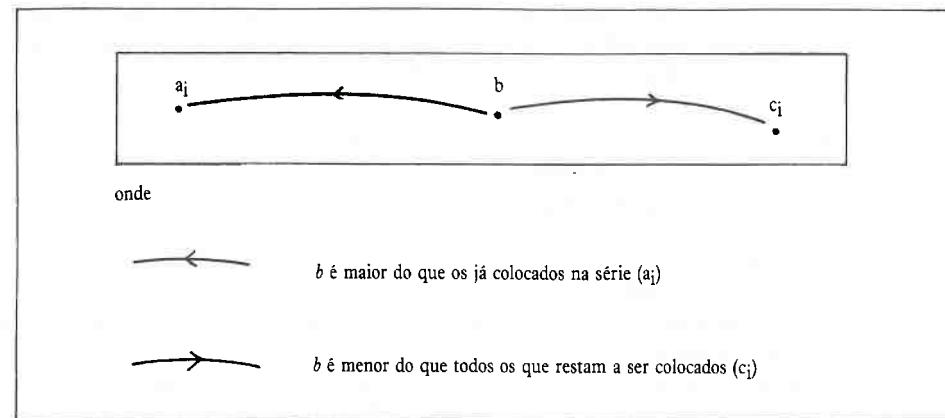


Figura 4.13 — A coordenação entre as relações: é maior do que — é menor do que.

tuição desta estrutura, a criança consegue, após várias tentativas, atingir a constituição da série (série intuitiva). Na verdade, esta criança não tem ainda consolidada em sua mente a coordenação das duas relações (↔) que garante a solução deste problema; por este motivo, nem sempre realiza a seleção adequada do elemento que dará prosseguimento à sua série. É somente quando o “erro” fica evidente pelo dado perceptivo que ela busca — pela troca sucessiva de lugar entre os objetos, por ensaio e erro — fazer sua correção.

A SÉRIE OPERATÓRIA (FASE III)

Quando, finalmente, esta coordenação é atingida, a criança expressa uma sistemática definida em seu pensamento que orienta toda a sua ação. Assim, ela “pesquisa” o próximo elemento a ser colocado na série, evidenciando que além de procurar um maior do que os já seriados, este também deverá ser menor do que todos os restantes. É a reversibilidade do pensamento que permitiu este “ir e vir mentalmente”, evocando a relação “é maior do que” simultaneamente à sua inver-

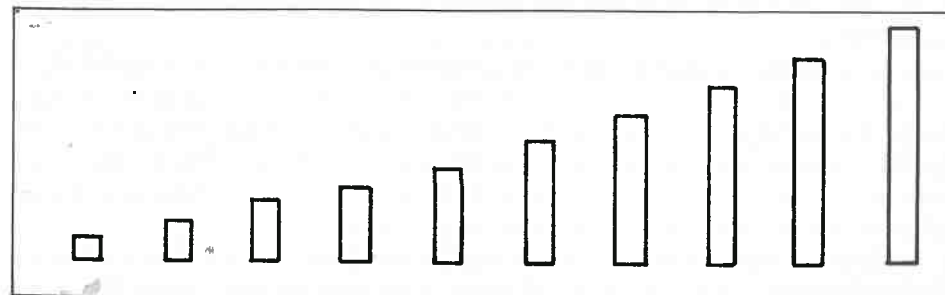


Figura 4.14 — A seriação ascendente de dez bastões.

sa (é menor do que); com isto, a solução da criança passa a ser assegurada pelas operações que a ela subordinam os dados perceptivos em questão.

NÚMERO OPERATÓRIO: SÍNTESE DA INCLUSÃO DE CLASSES E DA ORDEM SERIAL

Piaget (1975) aponta que a criança constitui o número em função de sucessão natural do mesmo, ou seja, a criança só constrói o quatro depois de ter construído o um, o dois, o três; e depois do quatro, constrói o cinco, depois o seis...

Esta construção ocorre em solidariedade estrita com as operações da lógica de classificação e de seriação. Assim, ao nível pré-lógico corresponde o nível pré-numérico, e o número operatório só se estabiliza quando existe uma síntese, num único sistema, das estruturas de "grupamento" de inclusão de classes ($A + A' = B$; $B + B' = C...$) e de seriação, com a sucessão dos números constituindo-se, portanto, na síntese operatória da classificação e da seriação.

As operações lógicas e aritméticas nos parecem, portanto, com um único sistema total e psicologicamente natural, com as segundas resultando da generalização e da fusão das primeiras, sob seus dois aspectos complementares da inclusão de classes e da seriação das relações, mas com eliminação das qualidades. (Piaget, 1975, p.12.)

Estudos posteriores a Piaget mostram que esta síntese ocorre primeiramente para os números elementares e se estende de maneira muito progressiva para o resto da série. Gréco (1960) demonstrou que ela ocorre por parcelas de aproximadamente 1-7, depois 7-15, após 15-30. Inicialmente, as parcelas não são aritmetizadas (número operatório) e conservam só o seu caráter cardinal (reconhecer a quantidade total de uma coleção pela contagem ou pela correspondência termo a termo) e de simples ordem serial (reconhecer, por exemplo, que depois do oito vem o nove, depois o dez, o onze...), sem que, no entanto, a síntese seja estabelecida e generalizada.

A criança, inicialmente, precisa agir muito sobre os objetos, estabelecendo relações entre eles em função de suas qualidades (relação de semelhanças e diferenças seriáveis); precisa, também, interessar-se pela quantificação das coleções para posteriormente ser capaz de realizar tal síntese que permitirá a consolidação da estrutura do número operatório.

Geralmente, os adultos fazem interpretações errôneas sobre as possibilidades da criança lidar com os números e de realizar mentalmente operações numéricas com significado. Alguns crêem que ensinando a numeração falada às crianças estas estarão aprendendo o número. Piaget demonstra em sua teoria que a numeração falada pode se constituir num instrumento útil à consolidação do número aritmetizado, mas não é condição suficiente para a construção total desta estrutura.

O mesmo engano ocorre em relação à possibilidade da criança utilizar a correspondência biunívoca e recíproca (correspondência termo a termo) entre elementos de duas coleções. Alguns teóricos chegaram a acreditar que a criança já teria atingido o núme-

ro com significado operatório se empregasse a correspondência termo a termo espontaneamente para constituir uma coleção equivalente a outra dada.

Esses teóricos definem o número como propriedade comum de conjuntos nos quais é possível estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca entre seus elementos. Piaget observa que tal definição é muito reduzida, pois não pressupõe a noção da invariância, tão necessária à consolidação do número aritmetizado. A correspondência termo a termo é necessária à construção da estrutura numérica, mas também não é uma condição suficiente.

Com efeito, para a avaliação da quantidade total (cardinal) de uma coleção tanto empregamos a contagem quanto a correspondência termo a termo; no entanto, a quantidade total só é aritmetizada quando ocorre a síntese da classe e da série e os aspectos cardinais e ordinais se assimilam reciprocamente. Veremos, pois, como a criança evolui nas duas condutas para avaliar a quantidade total (o cardinal de uma coleção) e como o caráter cardinal e ordinal se inter-relacionam neste processo. Finalmente, analisaremos como ocorre a síntese da inclusão hierárquica e da ordem serial que garante a consolidação da estrutura do número operatório.

A evolução da contagem para a avaliação do cardinal de uma coleção

Piaget (1975), ao tratar da gênese do número, não se preocupou em esclarecer como a criança evolui em suas condutas até atingir a capacidade de contar para avaliar o cardinal de uma coleção. Esclarece, isto sim, que esta capacidade não garante que o número tenha atingido o seu significado operatório para a criança.

Concordamos que a contagem não é a condição suficiente para que o número atinja o seu significado operatório. Apesar disso, acreditamos que os estudos até agora realizados não esclarecem devidamente como a criança chega a ser capaz de contar com êxito os objetos de uma coleção e por que este instrumento não garante que a estrutura do número operatório já esteja estabilizada. Aprofundar estas questões é, ao nosso ver, de fundamental importância, tendo em vista a formação de professores. Temos observado que a maioria dos professores crê ser possível ensinar uma criança a contar, e ela já sabendo contar, então já se pode ensinar a adição...

Nossa práxis junto às crianças pequenas nos mostrou que esta capacidade de contar objetos com êxito é construída progressiva e interiormente pela criança e só se consolida quando ela é capaz de coordenar reciprocamente várias ações aplicadas sobre os objetos, a fim de quantificá-los. Temos constatado que nossos esforços para "ensinar a contar" são inúteis, pois a criança só é capaz de fazê-lo quando constrói internamente tais coordenações.

Veremos, a seguir, que ações são estas, como esta coordenação é progressivamente construída e por que ela ainda não garante que o número tenha atingido o seu significado operatório.

As crianças muito pequenas (a partir dos dois anos, aproximadamente) já se mostram interessadas pelo emprego da numeração falada e realizam uma imitação do gesto de contar objetos. De fato, elas não estão ainda preocupadas em efetivamente descobrir

quantos objetos existem numa coleção; por isto, o que fazem é apenas uma imitação desta conduta, para mais adiante virem a utilizá-la com significado.

Esta imitação tem, então, a finalidade de buscar o sentido do emprego da contagem realizada pelo adulto e pelas crianças maiores, ou seja, é uma representação ativa de uma sucessão de ações que ela observa e que não possui, no momento, condições de entender suficientemente. Este seu gesto não é realizado com o seu real significado; por isto mesmo se constitui apenas numa imitação, com predomínio da acomodação sobre a assimilação. Nesta conduta, as crianças pequenas manifestam vários “erros”: ou “contam”² objetos ausentes; ou esquecem de contar algum dos objetos; ou contam mais de uma vez um mesmo objeto; ou, finalmente, podem utilizar as palavras que “enumeram” os objetos não na ordem convencional, empregando, inclusive, mais de uma vez uma mesma palavra.

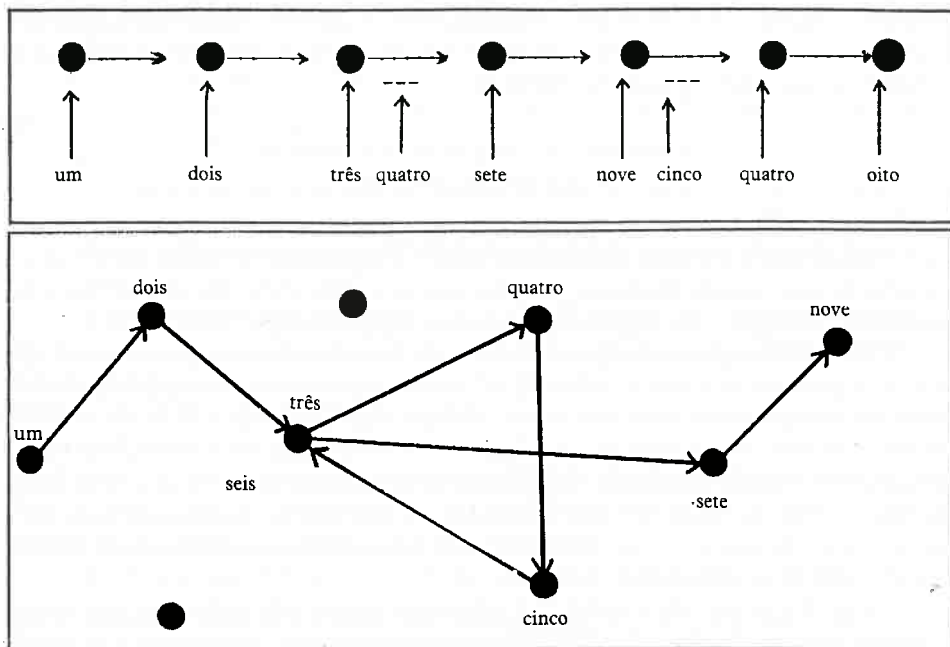


Figura 4.15 — Condutas características das crianças pequenas ao imitarem o ato da contagem.

A seguir, um exemplo que caracteriza a conduta deste nível:

CRIS (3 anos e meio) pegou cinco folhas de um monte sem quantificá-las. Ao ver seus primos maiores disputando entre si as folhas que restaram, contando-as, ela os imita e espontaneamente põe-se a contar suas folhas: “Um, dois, três, quatro”. CRIS, no entanto, pega a quarta e a quinta folhas simultaneamente. Questiono-a, então: “Quan-

2 — As palavras “erros”, “contam” e “enumeram” estão assinaladas porque não correspondem ao seu significado próprio. A criança nesta fase não erra, efetivamente, pois esta conduta é considerada um *erro construtivo*, já que faz parte do desenvolvimento de todas as crianças. Neste nível, ela não está efetivamente nem contando, nem enumerando os objetos, pois o que faz é uma imitação destas condutas, sem ter atingido o seu significado próprio.

tas folhas tens?” Ela, para responder, retoma a contagem ordenando agora corretamente os objetos, mas enganando-se na sucessão verbal: “Um, dois, quatro, cinco, seis”. Questiono-a novamente: “Quantas folhas tens?” CRIS, meio embaraçada, mostra em sua mão quatro dedos ao invés de cinco e não utiliza a numeração falada.

CRIS evidencia imitações das formas de quantificar, enumerando objetos e utilizando seus dedos. Observa-se que ela ainda não consegue individualizar todos os elementos da coleção, pois os esquemas que sustentam as possibilidades de ordenar os objetos e as palavras, e de correspondê-los biunívoca e reciprocamente, ainda não estão suficientemente construídos em sua mente. É para esta construção que seus esforços de imitação se orientarão.

Tentaremos analisar melhor como as crianças, partindo dessas imitações, chegam a utilizar corretamente a enumeração de objetos. Temos observado que esta aprendizagem é lenta e progressiva. Inicialmente, as crianças pequenas expressam corretamente a seqüência verbal “um, dois, três” e depois evocam outros nomes quaisquer, inclusive repetindo alguns já citados. Mais adiante, já são capazes de estender a seqüência verbal até o cinco e depois até o sete, etc.

Nota-se que esta extensão da sucessão verbal exige a aprendizagem de nomes que são arbitrários e que, portanto, precisam ser transmitidos pelas informações do meio social. Além de aprender estes nomes, a criança precisa verbalizá-los numa seqüência também arbitrária e convencional. Não existe nenhuma razão lógica que justifique por que é o nome “dois” que vem depois do “um”, o “três” depois do “dois”, etc.

O que assegura a aprendizagem destes nomes nesta sucessão é, pois, em parte, a informação que as crianças recebem do meio social e, em parte, uma construção interior da criança. Com efeito, é só quando as crianças se convencem, internamente, que a seqüência dos nomes empregados para enumerar os objetos ocorre num único sentido, que passam a pesquisar *qual é o nome seguinte* que dá continuidade à série. Isto só ocorre quando elas já são capazes de individualizar os elementos da coleção que desejam quantificar, estabelecendo a correspondência biunívoca e recíproca entre nome-elemento.

É comum observarmos, por exemplo, uma criança querendo quantificar uma coleção de seis objetos e, ao contá-los corretamente até o cinco, interromper perguntando: “O que vem depois do cinco?” Este interesse pelo próximo nome evidencia, pois, que a aprendizagem da numeração falada é também fruto de uma construção interior assegurada pela relação assimétrica — “vem depois de” — aplicada simultaneamente sobre os nomes aprendidos e sobre os objetos então individualizados. Muitas ações precisarão ser construídas e coordenadas pela criança para que, a partir das imitações iniciais, ela venha a empregar a numeração falada corretamente para descobrir quantos objetos têm numa coleção.

Estas ações se constituem em: a) juntar os objetos que serão contados, separando-os dos que não serão contados; b) ordenar os objetos para que todos sejam contados e cada um somente uma vez; c) ordenar os nomes aprendidos para a enumeração dos objetos, utilizando-os na sucessão convencional, não esquecendo nomes nem empregando mais de uma vez o mesmo nome; d) estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca nome-objeto; e, finalmente, e) entender que a quantidade total de elementos de uma coleção pode ser expressa por um único nome.

Para que a correspondência biunívoca e recíproca nome-objeto se efetive, a criança terá de utilizar tanto a relação simétrica — ao juntar os objetos que serão contados, separando-os dos que não serão — quanto a assimétrica — ao ordenar os objetos, um após outro, e as palavras. Porém, *estas relações serão aplicadas não sobre qualidades dos objetos* do tipo: *a* é maior do que *b*, ou *a* tem a mesma cor que *b*. É por isto que dizemos que a quantificação exige a eliminação das qualidades observáveis dos objetos.

O que não podemos pensar é que estas ações presentes à quantificação de objetos surgem uma após outra e vão se somando sucessivamente. Ao contrário, elas evoluem simultaneamente na direção de um equilíbrio cada vez mais estável entre a assimilação e a acomodação que, finalmente, é atingido quando há a coordenação recíproca (por abstração reflexiva) de uma ação às outras. Assim ocorre o entendimento do que seja a quantidade total de uma coleção, constituída pelos elementos então individualizados e ao mesmo tempo reunidos num todo.

A criança se torna capaz de chegar ao entendimento de que o cardinal de uma coleção é, por exemplo, “sete” quando, correspondendo biunívoca e reciprocamente cada objeto ordenado de uma coleção a um nome da sucessão verbal, faz a abstração de que “sete” se refere a todos os objetos contados e não apenas ao sétimo elemento da série (ver figura 4.19). Esta diferenciação construída entre os elementos individualizados e a totalidade de que fazem parte inicialmente ainda é de ordem qualitativa e não numérica, pois não implica a aritmetização das relações que sustentam a invariância numérica, por isto chamamos de quantidade total intuitiva ou qualitativa.

A seguir, veremos algumas condutas nas quais as crianças já evoluíram de suas imitações iniciais e empregam a numeração falada para quantificar os objetos, porém ainda não concebem que a quantidade total de objetos possa ser expressa por um único nome.

GAB (3 anos e 4 meses) ganha quatro balas e as coloca uma ao lado da outra, contando espontaneamente: “Um, dois, três, quatro”. Intervenho perguntando: “Quantas balas ganhaste?” Ela retoma imediatamente a contagem. Questiono novamente: “Quantas balas tens aí?” GAB novamente retorna à contagem e não verbaliza o “quatro” como a quantidade total. Peço que me mostre com os dedinhos quantas balas ganhou. Ela vai apontando um dedo sobre cada bala (correspondência termo a termo) e, ao final, mostra, satisfeita, os quatro dedos sem, no entanto, verbalizar a quantidade total “quatro”. BIB (3 anos e 5 meses) pega cinco bolachas de um vidro, uma por uma, enfileira-as e conta-as espontaneamente. A partir daí intervenho e toda a vez que a questiono sobre quantas bolachas pegou, ela volta a contá-las corretamente, porém sem expressar o “cinco” como quantidade total. Pergunto diretamente: “Pegaste cinco bolachas?” Ela fica embaraçada e não responde, retomando novamente a contagem. Prossigo: “Tens aí cinco bolachas?” Ela, meio hesitante, responde que sim. Pergunto novamente: “Onde é que tem cinco bolachas?” Ela mostra a quinta bolacha como se fosse “cinco”. Peço que me mostre com os dedos quantas bolachas pegou e ela faz corretamente a correspondência termo a termo dedo-bolacha e me mostra satisfeita os cinco dedos. Novamente questiono: “Tem cinco dedos aí?” Ela os conta e responde afirmativamente, indicando, sem muita convicção, o quinto dedo como se fosse “cinco”.

Observa-se que, apesar da criança deste nível já utilizar corretamente a numeração verbal para contar elementos, empregando a correspondência biunívoca e recíproca com vistas à igualização entre duas coleções (dedos-bolachas), sua grande dificuldade é conceber que a quantidade total possa ser verbalizada por uma única palavra. Não há neste

nível diferenciação entre o aspecto cardinal (cinco) e o ordinal (quinto). As palavras, para estas crianças, têm a função de individualizar e nomear os objetos e, por isto, a palavra “cinco” para BIB representa o quinto termo enumerado e não cinco elementos considerados simultaneamente numa totalidade. O êxito nas respostas de “mostrar com os dedos quantos tem” se justifica porque esta solução exige que os dedos sejam individualizados, ordenados, correspondendo-se biunívoca e reciprocamente a cada objeto e isto ela já é capaz de realizar neste nível.

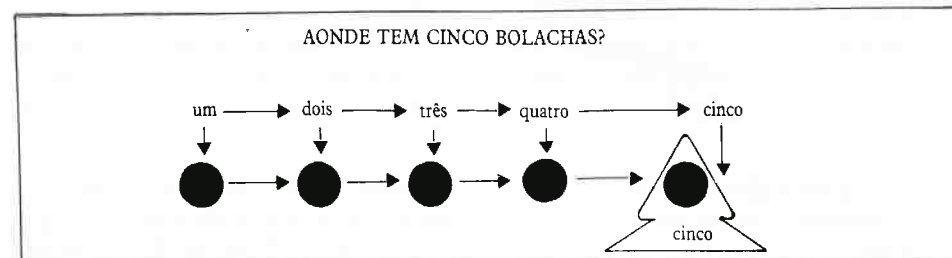


Figura 4.16 — A indiferenciação entre o caráter cardinal e ordinal do número.

Foi nesta época que GAB, ao final de um jogo com sua mãe e seus irmãos, empregou espontaneamente a contagem para quantificar suas oito fichas (que indicavam os pontos que obtivera) e gritou: “Ganhei!” Observa-se que, apesar de não nomear a quantidade total por “oito”, ela usou a contagem corretamente para quantificar os objetos de sua coleção, enquanto ninguém havia empregado tal instrumento. Obviamente este resultado fora extremamente favorecido, pois sua mãe fizera somente três pontos e seu irmão quatro. O importante, no entanto, é a criança já estar construindo um significado para estas ações e elas deixarem de se constituir em meras imitações, como no nível anterior.

A construção deste significado se sustenta por duas razões: uma que se relaciona às condições internas da criança, que dizem respeito aos seus *esquemas mentais de assimilação*, e outra que se relaciona ao *contexto solicitador da atividade* da criança.

Com efeito, a atividade espontânea da criança de recorrer à numeração falada para quantificar sua coleção, quando ninguém recorreu a este instrumento, evidencia que, em nível endógeno, já existe a presença de esquemas que sustentam suas ações. Na fase anterior (de imitação), observávamos o predomínio da acomodação sobre a assimilação, exatamente porque a criança precisava construir internamente tais esquemas. Neste nível posterior, alguns destes esquemas já foram construídos, sendo possível, então, uma compensação melhor entre a acomodação e a assimilação. Por outro lado, o contexto precisava ser suficientemente “solicitador” à atividade de quantificação. Num jogo, as crianças pequenas sentem a necessidade de estarem comparando as quantidades de pontos de cada parceiro, sem ninguém induzir tais comparações. Comprovamos a importância do contexto quando, neste mesmo dia, logo após este jogo, GAB foi solicitada por sua mãe a responder quantos bonecos havia numa coleção, sem que ela tivesse espontaneamente mostrado interesse por fazê-lo. GAB “obedeceu”, contou os bonecos empregando as palavras na sucessão correta de um a dez, porém sem correspondê-las necessariamente a cada objeto apontado. Eram oito bonecos e ela “enumerou-os” até o dez!

Observa-se, portanto, que na fase de construção de uma estrutura, se não existe um contexto favorável, a ação da criança passa a ser realizada sem a “busca de um sentido”. Ou seja, mesmo que em nível endógeno já estejam sendo construídos os esquemas que sustentam a possibilidade da criança atribuir um sentido a uma atividade, ela só os aplicará sobre tal situação se se sentir suficientemente problematizada pelo contexto solicitador desta atividade. Esta questão sobre o *significado* na relação contexto solicitador-estruturas da inteligência tem repercussões profundas nas questões relativas à organização do ensino da Matemática nas séries iniciais do 1.º grau.

Examinemos, a seguir, algumas condutas que enunciam a superação do problema desta fase intermediária entre a imitação e o êxito na contagem. Veremos como a criança concebe que uma única palavra possa expressar a quantidade total de objetos de uma coleção.

Um dia BIB (3 anos e meio) arrumou sobre a mesa dois pares de botas (o seu e o de sua irmã gêmea) e, espontaneamente, as contou: “Um, dois, três, quatro”. Ao ser questionada sobre quantas botas havia sobre a mesa, respondeu à pergunta enumerando os objetos: “Um, dois, três, quatro”, sem verbalizar o total. Prossegui: “Tem quatro botas aí?” Ela afirmou rapidamente que sim. Perguntei: “Onde tem quatro botas?” Ela ficou indecisa, pensou e com um gesto ligou o primeiro elemento ao último, enquanto dizia: “QUAAATRO” (ver figura 4.17).

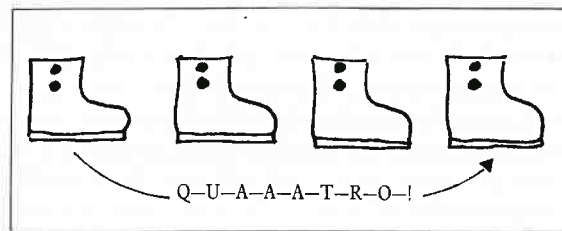


Figura 4.17 — A construção da diferenciação entre o caráter cardinal e ordinal do número apoiado nos dados da percepção.

GAB (3 anos e 7 meses) vem correndo me mostrar dois ursinhos, dizendo: “Olha, tem dois iguaizinhos”. Perguntei, então: “Quantos ursinhos tem aí?” Ela recorreu à contagem: “Um, dois”. Continuei perguntando: “Onde tem dois ursinhos?” Ela ficou perplexa diante da pergunta, pois lhe era tão comum enumerar “dois”... Para conciliar a contradição que vivenciava entre o fato de já sabidamente a palavra dois corresponder a uma coleção com a utilização do nome “dois” para a contagem do segundo elemento da coleção, ela apontou um ursinho de cada vez dizendo: “Do-is”, fazendo a correspondência sílaba-objeto, individualizando cada elemento como parte da totalidade.

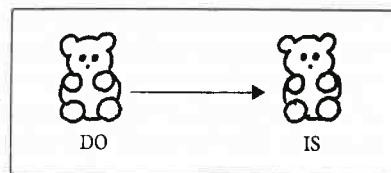


Figura 4.18 — A necessidade de estender o nome “dois” a todos os objetos incluídos na coleção.

A partir destas situações, toda a vez que eu observava GAB ou BIB, em suas atividades espontâneas, empregando a contagem para quantificar uma coleção, eu as questionava sobre quantos haviam contado. Elas conseguiam responder corretamente, empregando um único nome para expressar a quantidade total, e faziam corresponder a este

nome todos os objetos da coleção. Este “êxito”, porém, só era possível se a atividade de quantificação estivesse relacionada a um contexto significativo no qual elas empregavam a contagem espontaneamente (jogo simbólico ou de regras). Observa-se, pois, nestas condutas, o início da coordenação recíproca do cardinal e do ordinal. Veremos, porém, que esta coordenação inicial é de ordem qualitativa e não numérica, pois se refere à coordenação de relações de ordem espacial e temporal, mas não ainda aritmetizada.

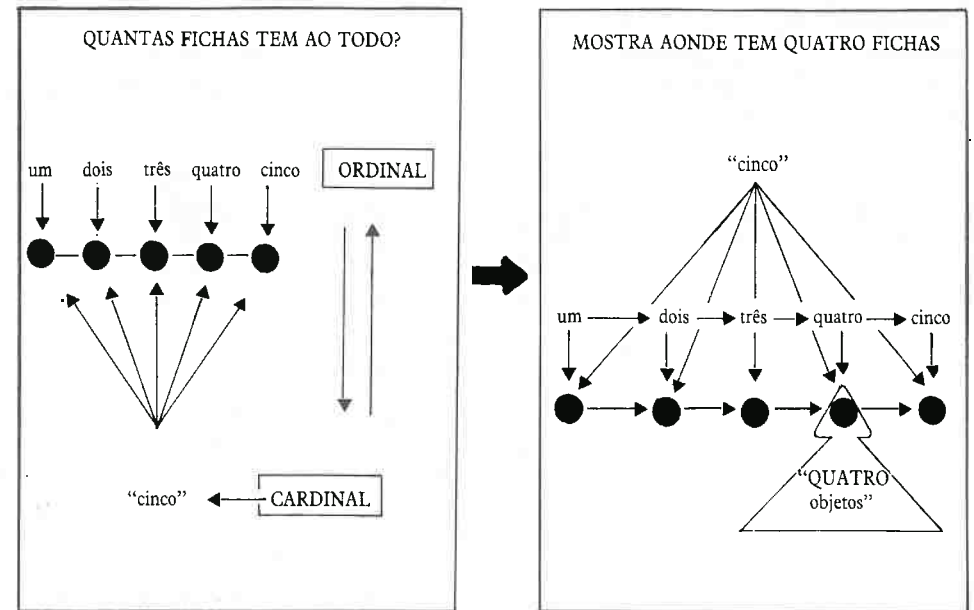


Figura 4.19 — A noção da quantidade total com ausência da inclusão hierárquica do número.

Apesar de, nesta fase, a criança já ter êxito na contagem e na avaliação da quantidade total de uma coleção, ela ainda não consolidou a estrutura numérica operatória, pois não é capaz de postular a inclusão hierárquica do número; a quantidade total não é possível de ser aritmetizada, permanecendo, portanto, de caráter qualitativo, como veremos a seguir:

GAB (4 anos e 4 meses). Brincando com tampinhas, questionei-a sobre quantas possuía na sua coleção. Ela espontaneamente contou-as e respondeu-me: “Sete”. Questionei-a: “Onde tem sete tampinhas?” Mostrou-me todas. Perguntei-lhe se podia me mostrar quatro tampinhas. Contou e apontou a quarta como “quatro”. O mesmo fez para três, dois, até sete!

Nesta situação, estavam presentes dois problemas. Inicialmente, GAB não havia mostrado interesse espontâneo pela quantificação das tampinhas da coleção e as subcoleções a ela encaixadas: foi uma intervenção minha. O outro problema é que lhe foi solicitado pensar simultaneamente no todo e numa subcoleção do total (pensar em quatro das sete tampinhas) e para isto GAB precisava realizar uma coordenação entre o cardinal e o ordinal ainda mais complexa. Neste nível, como a quantidade total enunciada é

de caráter intuitivo, ela não sustenta a possibilidade de pensar nas partes e no todo simultaneamente.

Foi assim que um dia CAR (3 anos e 3 meses) arrumou quatro bonequinhos Play-Mobyl numa fila e, espontaneamente, contou-os, dizendo: "Olha, tem quatro bonequinhos". Observando que ele já era capaz de nomear a quantidade total, questionei: "Onde tem mais bonequinhos, em quatro ou três bonecos?" CAR rapidamente respondeu: "É igual!" Perguntei-lhe por que, estranhando muito a sua resposta, e ele explicou: "O três e o quatro são bem iguazinhos, oh!" Mostrava-me, assim, que os tamanhos do terceiro e do quarto bonecos eram iguais!

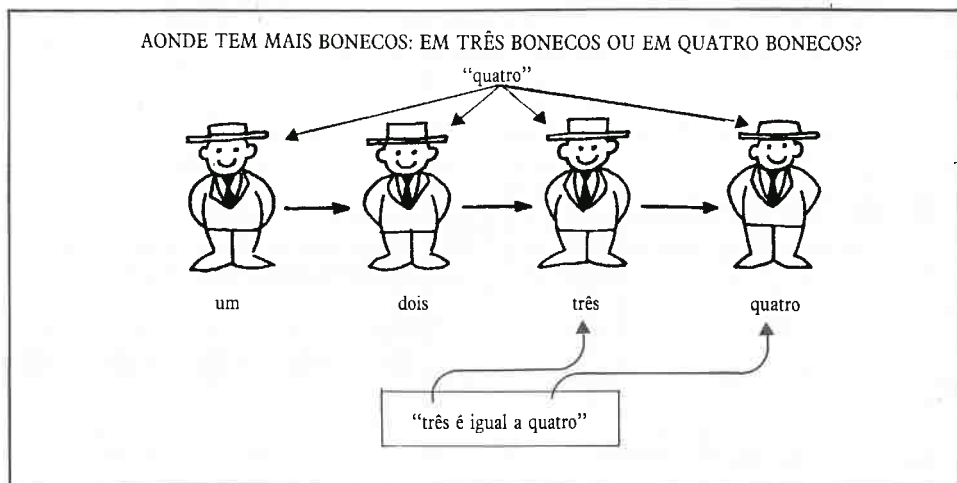


Figura 4.20 — A criança compara o tamanho do terceiro e do quarto boneco.

Apesar de já realizar a contagem com êxito e nomear a quantidade total, quando CAR é solicitado a pensar simultaneamente o número de uma subcoleção (três) e o total que a contém (quatro), por sua incapacidade de fazer tal coordenação operatória reduz o "três" ao nome do terceiro boneco e o "quatro" ao nome do quarto boneco.

Assim, o total concebido isoladamente é "quatro", mas o total, quando solicitado a se coordenar com uma das partes, reduz-se ao quarto termo. Por isso dizemos que a coordenação entre o aspecto cardinal e ordinal do número, neste nível, é de ordem qualitativa, sendo, então, rompida quando a criança é solicitada a coordenar simultaneamente a quantidade total com a de uma subcoleção nela encaixada, pois, neste caso, ela não tem mais o apoio na percepção para postular sua resposta. Este é o mesmo problema que a criança tem no desenvolvimento da estrutura de classificação, quando reduz o total ao complemento de uma subclasse, ao ser solicitada a relacionar simultaneamente esta subclasse com o total que a contém. (Entender, por exemplo, que há mais frutas do que laranjas, pois todas as laranjas são algumas das frutas, já que existem outras frutas que não são laranjas.) Esta coordenação só é possível quando a criança atinge, pelo pensamento reversível, a classe operatória. Assim, esta coordenação entre cardinal e ordinal, solicitada a CAR, só será resolvida quando também o número operatório estiver consolidado em sua mente.

A conduta de contar os elementos de uma coleção, expressando a quantidade total com uma única palavra, sem ter atingido o número operatório, corresponde ao que, no desenvolvimento da estrutura de classificação, chamamos de coleções não-figurais; no desenvolvimento da estrutura de seriação, chamamos de série intuitiva. Neste nível semi-operatório, tanto para a classificação e a seriação quanto para o número, a criança realiza uma série de coordenações de ações, porém ainda favorecidas pelos fatores perceptivos.

É assim que se CAR tivesse separado seus bonecos em duas coleções, uma de três e outra de quatro elementos, e espontaneamente os contasse, ele saberia dizer que na coleção de quatro havia mais bonecos, ou que em três tem pouco, pois esta resposta é favorecida pelo dado perceptivo. Por outro lado, se lhe perguntássemos o que vem depois do três, ele saberia dizer que é o quatro. Mas, no caso ilustrado, CAR precisava pensar na coleção "três" incluída na do "quatro", coordenando simultaneamente as partes e o todo. Isto exigia a síntese recíproca da inclusão hierárquica e da ordenação, ou seja, conceber o número com seu caráter cardinal e ordinal reciprocamente (ver figura 4.21), coordenados por uma operação e não mais por uma intuição.

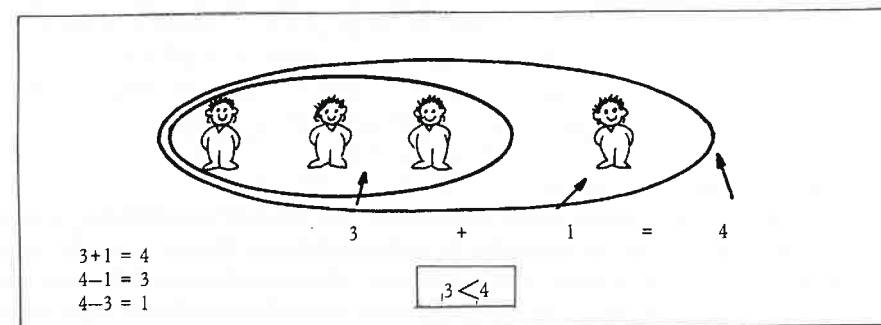


Figura 4.21 — Quantidade total numérica: presença da inclusão hierárquica do número.

Quando a quantidade total for de ordem intuitiva, toda vez que se realizar uma transformação com os objetos da coleção quantificada, a criança sentirá necessidade de recontar os seus elementos, pois, devido à transformação, já não mais tem certeza de que a quantidade total permanece a mesma. Assim, se uma criança se interessou por uma coleção e quantificou-a acertadamente, concebendo a quantidade total como "seis", ao dispensarmos, à sua vista, os seis elementos pelo espaço e perguntarmos "Quantos tem?", ela precisará novamente contá-los. Nem mesmo terá a certeza de que invertendo o sentido da contagem (da direita para a esquerda, se o fez da esquerda para a direita), ainda encontrará seis objetos em sua coleção! Somente quando a quantidade total for numérica, por uma coordenação operatória da cardinalidade e da ordenação (assegurada pela síntese da classe e da série), é que a invariância do número será concebida pela criança.

O desenvolvimento da correspondência termo a termo e a consolidação do número operatório

Para Piaget, as noções aritméticas se estruturam progressivamente em função da necessidade de conservação, e esta necessidade se impõe ao espírito humano como uma espécie de "a priori" funcional do pensamento.

A invariância numérica (conservação) só é atingida quando o sujeito é capaz de conceber que um número permanece idêntico a si mesmo, seja qual for a disposição das unidades que o compõem. A totalidade passa então a ser a resultante da coordenação de diversas relações percebidas, cujo julgamento transcende os próprios dados fornecidos pela percepção. Para Piaget, o desenvolvimento da correspondência biunívoca e recíproca constitui-se numa das fontes do número operatório. Porém, se a correspondência termo a termo surge no decorrer da evolução desta estrutura, a sua constituição, como também a da contagem, apesar de necessária, não é suficiente para a consolidação desta estrutura.

Com efeito, quando a criança iguala uma coleção à outra pela correspondência termo a termo, os aspectos cardinais e ordinais do número podem se manifestar ainda indiferenciados em suas ações.

Veremos, a seguir, em que situações a criança utiliza a correspondência termo a termo e qual a coordenação que precisa estabelecer entre as relações percebidas para realizar esta correspondência. Mais adiante veremos por que a correspondência termo a termo não assegura a invariância numérica e qual a nova coordenação que a criança precisa realizar para atingir finalmente a conservação do número. Veremos também como a evolução da correspondência termo a termo e da contagem se relacionam.

Do ponto de vista psicológico e não-lógico, existem situações diferenciadas nas quais a criança é levada a praticar a correspondência termo a termo:

- a) correspondência estática com objetos heterogêneos e homogêneos;
- b) correspondência dinâmica.

No primeiro caso, a correspondência estática com objetos heterogêneos, a natureza do material *provoca* o estabelecimento da correspondência. Assim, se apresentarmos uma coleção de pires e de xícaras às crianças, estas, pelo significado utilitário do material, irão fazer a correspondência xícara-pires, a fim de constituir coleções equivalentes. Caso falem xícaras, mesmo as crianças pequenas verbalizarão: “Tem pouca xícara, não tem o mesmo tanto...” e suas respostas estarão asseguradas pelos dados fornecidos pela percepção.

Já na correspondência estática com objetos homogêneos, o material não provocará a correspondência, e a criança só a estabelecerá se sentir internamente esta necessidade pela possibilidade de coordenar relações percebidas no espaço ocupado por tais objetos, como veremos a seguir. A correspondência dinâmica se evidencia na troca um contra um, por exemplo, na troca de uma moeda por uma mercadoria. As crianças pequenas, em suas atividades espontâneas sobre materiais, interessam-se naturalmente em construir uma coleção equivalente à outra, empregando a correspondência termo a termo; para tanto, elas precisam coordenar relações que inicialmente dizem respeito ao espaço ocupado pelos objetos das coleções e, posteriormente, quando o pensamento se torna reversível, conseguem diferenciar estas relações de ordem espacial (qualitativas) das relações numéricas (quantitativas).

A seguir, iremos descrever um exemplo típico da correspondência termo a termo com objetos homogêneos, que nos mostra como ocorre a coordenação qualitativa das relações espaciais e por que elas são insuficientes para que a invariância numérica esteja assegurada. Suponhamos que ao apresentarmos à criança duas coleções de fichas iguais

que variam apenas na cor (azuis e vermelhas), ela escolha para si as vermelhas. Vamos então propor que separe de suas fichas vermelhas tantas quantas as azuis separadas por nós numa fila. Dizemos: “Separa, das tuas fichas, uma vermelha para cada azul que eu separei, nem mais nem menos; separa a mesma quantidade de fichas que eu separei”.

Piaget nos mostra que, num primeiro nível, as crianças não empregam a correspondência termo a termo em sua solução, fazendo somente uma *correspondência global*. Elas não têm êxito em sua solução pela incapacidade de coordenar as duas relações fornecidas pelos dados de percepção, que são: o comprimento da fila e sua densidade (distância de um elemento ao próximo). Assim, a criança fixa-se no comprimento e negligencia a densidade, colocando mais fichas na sua coleção:

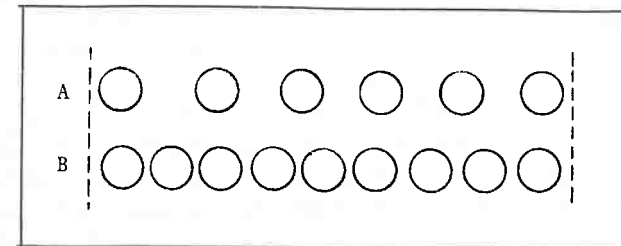


Figura 4.22 — Conduta pré-operatória: “A e B têm a mesma quantidade de fichas”.

Na verdade, a criança deste nível ainda não possui a noção de quantidade numérica; ela concebe apenas uma quantidade bruta unidimensional (presa apenas à dimensão do comprimento, sem coordená-la à densidade). Este nível corresponde ao que caracterizamos anteriormente como o de imitação da contagem, onde os elementos não eram suficientemente individualizados pela criança.

Num próximo nível, o da *correspondência intuitiva*, ela consegue igualizar as duas coleções pelo emprego espontâneo da correspondência termo a termo. Isto é possível porque ela atingiu a coordenação entre as relações espaciais de densidade e de comprimento. É esta coordenação que permite à criança colocar um objeto em frente ao outro para a solução do problema proposto.

Piaget aponta que esta coordenação inicialmente é de caráter intuitivo, pois só é possível quando o dado perceptivo é suficientemente favorável, ou seja, se os objetos das duas coleções guardarem a mesma distância entre eles ou se ocuparem o mesmo comprimento, ou ambos.

Neste nível, ainda que a criança tenha igualado e sua coleção B à coleção A, pelo emprego espontâneo termo a termo, ela deixará de acreditar nesta igualdade se transformarmos sua coleção, deixando os elementos de B mais afastados um do outro. Neste caso, os dados perceptivos deixam de favorecer a coordenação das relações de comprimento e densidade, e esta coordenação é rompida, subordinando-se às ilusões percebidas; a criança acreditará “Em B há mais fichas porque a fila é maior”.

Para conceber que a quantidade de fichas permanece a mesma quando os objetos de B forem espaçados, é necessário que a criança compense a diminuição da densidade de B (mais espaço entre os elementos) com o aumento de seu comprimento; esta coordenação exigirá a presença da reversibilidade operatória que ainda não foi construída pe-

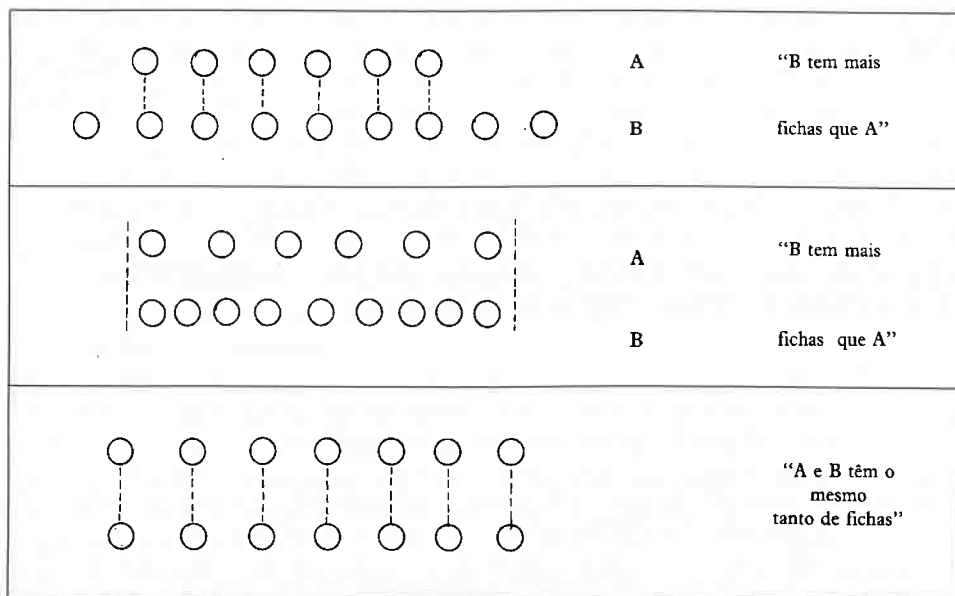


Figura 4.23 — Soluções possíveis pela correspondência termo-a-termo intuitiva

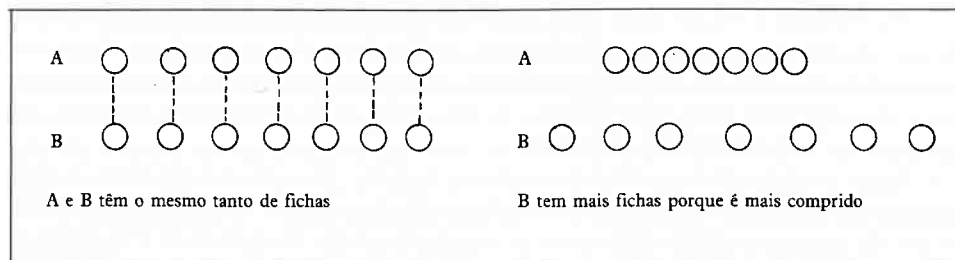


Figura 4.24 — Conduta da fase II: a criança iguala duas coleções, mas não conserva a quantidade numérica.

la criança deste nível. Assim, a multiplicação densidade x comprimento é ainda qualitativa e não aritmetizada.

Se questionarmos esta criança sobre o que é necessário fazer para que A e B tenham a mesma quantidade de fichas, ela provavelmente nos responderá que é preciso aproximar mais as fichas de B, colocando-as em frente às de A. Assim, a criança concebe o *retorno empírico*, ou seja, o retorno ao estado inicial mediante a *ação* inversa. A reversibilidade operatória exigirá este retorno ao nível não da ação, mas da transformação mental, e isto só mais adiante a criança atingirá.

Relacionando com a aprendizagem da contagem, mesmo que a criança já tenha “aprendido a contar”, neste nível, ela não empregará esta aprendizagem como um instrumento confiável para solucionar o problema da igualização entre as duas coleções. Assim, resolve o problema pela correspondência termo a termo e se, ao fazermos a transformação em B, lhe sugerirmos que conte os elementos das séries, este instrumento não lhe

assegurará necessariamente o entendimento de que a quantidade de fichas permanece invariável.

Vimos que, inicialmente, a criança tem consciência da totalidade e dos elementos, mas estas duas percepções sucedem-se sem se reunir. Agora já existe uma coligação entre a totalidade e os elementos, podendo estes, então, serem individualizados; mas esta coligação é ainda de caráter intuitivo até que se harmonize. Piaget mostra que, para pequenas coleções de dois, três ou quatro elementos, esta coligação é favorecida porque é possível a percepção simultânea do todo e dos elementos que o compõem. Assim os números 1 a 4 - 5 são chamados de intuitivos ou perceptivos, pois esta coligação é sustentada pela percepção e não pela operação.

Num próximo nível, as crianças já empregam espontaneamente, para coleções além de cinco elementos, a contagem em suas soluções, além da correspondência termo a termo; não atingem, contudo, a invariância numérica — é a conservação da “quantidade” (como nome numérico, e não da quantidade). Se, então, transformarmos B e as questionarmos: “Tem o mesmo tanto de fichas em A e B, ou B tem mais fichas que A?”, elas acreditam, inicialmente, que B tem mais fichas que A, porque a fila está mais comprida. Ao recorrerem à contagem para quantificar as coleções, concluem que o número é o mesmo: 7 e 7, mas este dado não é suficiente para corrigirem o seu julgamento anterior. Daí concluem: “Os dois têm 7. O número é igual, mas em B tem mais fichas porque está mais comprido”. O “sete” não é, portanto, concebido como a soma das partes $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$ (quantidade total numérica), mas como uma quantidade total de caráter qualitativo ou intuitivo.

ROB (7 anos e 2 meses). Igualou as coleções A e B contando inicialmente os elementos de A e colocando cada ficha de B em frente às de A, contando-as simultaneamente. Quando perguntei se as coleções tinham o mesmo tanto de fichas, disse que sim, porque as duas tinham sete. Quando transformei B, acreditou que em B havia mais fichas porque a fila estava comprida. Chamei-lhe a atenção sobre a sua avaliação inicial: “As duas coleções não tinham sete fichas?” Ele retoma a contagem de A: “sete”, e retoma a de B: “sete! — Não pode, eu erre!”. ROB relembra as fichas de B mais duas vezes até que consegue contar uma ficha imaginária entre a quinta e a sexta da série: “Oito, aqui tem mais fichas”.

Vê-se que ROB busca superar o conflito entre a intuição e a lógica: tinha de ter mais fichas em B porque a fila era maior e, se B tinha mais fichas, então o seu número também é maior!... A contradição estava presente, porém ROB, ao invés de corrigir sua avaliação intuitiva, subordinando-a aos dados fornecidos pela lógica, faz o inverso, e isto evidencia que a sua avaliação da quantidade total ou da correspondência ainda não é numérica, mas qualitativa.

Até atingirem a avaliação numérica da quantidade total, as crianças mostrarão respostas que oscilam entre a conservação e a não conservação. Assim, ora a contagem é um instrumento confiável, ora este recurso deixa de ser utilizado e os dados perceptivos voltam a ser mais fortes.

Piaget observou que, quando as transformações são pequenas, podem conceber a invariância numérica, e quando são maiores, voltam a avaliar a quantidade em função das relações espaciais percebidas. Nós acrescentamos que, nesta fase de construção da estrutura numérica, o contexto solicitador da atividade da criança é fundamental: quan-

to mais problematizada, curiosa e ativa estiver a criança tanto mais ela aplicará sobre sua atividade tais coordenações.

Nosso trabalho de vários anos na escola e a observação de muitas situações de aprendizagem confirmaram que esta coordenação é individual; não pode ser ensinada e nem é possível controlar o momento em que ela se instaura. Também comprovamos que a coordenação evidenciada num contexto não é transferida a outro. Assim, quando as crianças estão construindo a estrutura do número operatório, retomam condutas aparentemente já superadas em situações anteriores. A generalização e a transferência só são, deste modo, possíveis quando a estrutura do número está consolidada. A consequência disto é que é preciso variar muito os materiais, o contexto solicitador (jogos), com vistas à construção do número operatório. É preciso que a criança se sinta desafiada, provocada a confrontar os dados da intuição com os da lógica, através dos diferentes pontos de vista expressos por seus colegas. Assim, os conflitos se instauram em sua mente, e ela busca interiormente a superação dos mesmos.

Foi assim que Greice, numa atividade de construção de séries cíclicas com palitos, escolheu uma cartela para orientar sua série. A proposta era a de separar o mesmo número de palitos que a cartela indicava: nem mais, nem menos. Greice solucionou este problema fazendo a construção que está na figura 4.25.

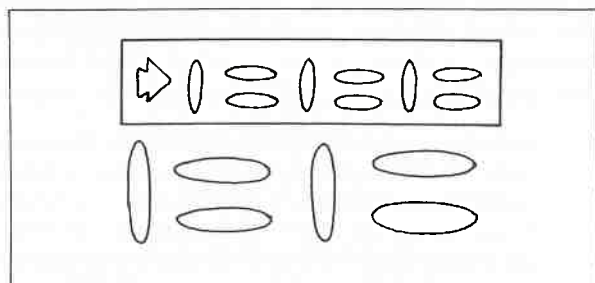


Figura 4.25 — Conduta pré-operatória: reproduzindo com palitos de madeira a série da cartela.

Quando questionada sobre a quantidade total de palitos da cartela e de sua coleção, Greice afirmava que estavam equivalentes. Mesmo com a interferência de colegas contando os elementos, ela não modificou sua conduta. Observamos que Greice avaliava a quantidade presa ao comprimento da série, não coordenando as relações comprimento-tamanho dos palitos. Uma semana depois, quando retomamos este trabalho para realizar nossas transformações nas séries trabalhadas pelas crianças, Greice conseguiu espontaneamente fazer a coordenação necessária e construiu sua série com o mesmo número de elementos da cartela. Como e quando se deu esta coordenação, não pudemos observar e nem mesmo isto interessava ao professor. O importante é não corrigir a resposta da criança, é deixá-la se expressar e solicitar sua reflexão, encorajando a discussão entre os pares. É a ação reflexiva da criança que determinará tal coordenação: quanto mais ela se sentir inibida ou constrangida para agir, mais tempo levará para realizá-la.

Mesmo tendo postulado esta coordenação, neste contexto, quando realizamos uma atividade com botões coloridos de tamanhos diferentes, Greice novamente fez avaliação da quantidade de suas coleções pelo dado perceptivo. Assim, julgou que um círculo de

oito botões tinha mais botões do que outro com dez, pois, no primeiro, os botões eram grandes e no segundo, pequenos. Nesta mesma atividade, postulou a igualização numérica de outras duas coleções distintas de botões grandes e pequenos, por estarem dispostos em subcoleções de 4, 3, 2 e 1 elementos na forma de torre. Assim, quando o dado perceptivo favorecia a avaliação, Greice não se confundia com o tamanho do espaço ocupado, caso contrário, a avaliação da quantidade ficava novamente presa ao aspecto qualitativo.

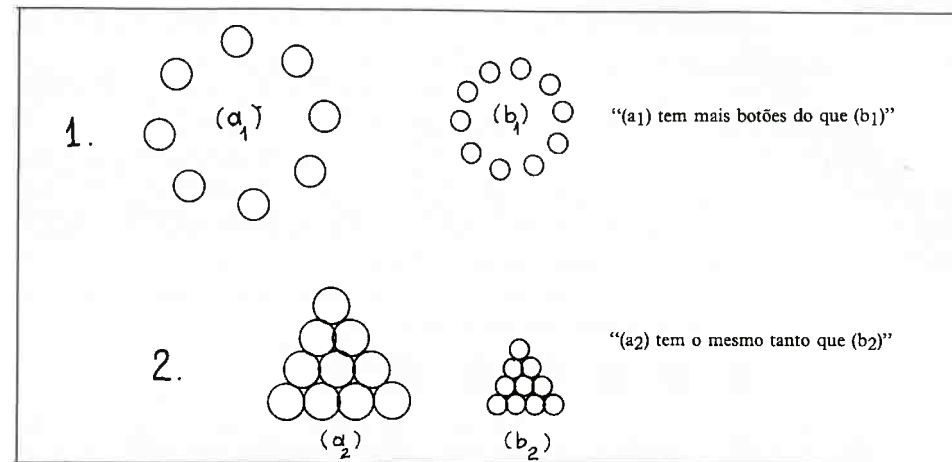


Figura 4.26 — A oscilação entre a conservação e a não-conservação das quantidades de pequenos conjuntos discretos de elementos.

Assim como Greice, muitas crianças evidenciaram estas idas e vindas a cada novo contexto trabalhado, até que, finalmente, a estrutura operatória do número se estabilizou e foram possíveis a transferência e a generalização da invariância numérica para qualquer nova atividade. Os dados referentes aos alunos de nossos grupos de pesquisa confirmam que a criança precisa se dar conta das contradições que suas respostas apontam, quando estão sustentadas pelas coordenações intuitivas. É quando a flutuação entre a não-conservação e a conservação se tornam impossíveis de se aceitar que a criança, por abstração reflexiva, postula o princípio da invariância numérica. Neste processo, a confrontação do seu ponto de vista com o dos colegas, a discussão coletiva é de fundamental importância para o despertar da consciência destas contradições.

Quando a estrutura do número se estabiliza, observa-se que, toda vez que necessita fazer uma avaliação, a criança espontaneamente recorre à contagem e a justifica, dizendo, por exemplo: “Tá igual nas duas filas, as duas têm sete, é a mesma quantidade de fichas”. Se, então, chamamos sua atenção para o dado perceptivo, dispondo os elementos de uma das coleções de forma a ocupar maior espaço, e ela observa um colega avaliar a quantidade presa aos dados da intuição, ela intervém refletindo sobre as ações transformadoras e argumenta: “Tem sete nas duas, a quantidade de fichas é igual, a gente não tirou nem botou fichas, só afastou, é a mesma coisa de fichas”. Por outro la-

do, ela avalia as diferenças espaciais pela coordenação das relações espaciais em jogo e justifica: "Tá mais comprido porque as fichas estão mais *separadas*, mas é a mesma quantidade". O comprimento passa, então, a ser concebido como *soma* dos intervalos entre cada elemento e o seu sucessor.

Vê-se que a contagem passa a ser empregada como um recurso da lógica na avaliação da quantidade total. É somente quando a correspondência termo a termo, inicialmente qualitativa, torna-se então numérica, que a numeração falada atinge o seu real significado e passa a ser utilizada como um instrumento da razão. Como, pois, a correspondência qualitativa se torna numérica?

Piaget responde a esta questão dizendo que a criança cria uma nova relação de caráter então operatório, que é a *igualização das diferenças*. Por esta operação, a criança, ao acrescentar um novo elemento à série que está quantificando, preocupa-se apenas com a relação criada em sua mente de "colocar mais um". Assim, o espaço ocupado entre este elemento e o anterior não mais importa na avaliação da quantidade, pois este dado perceptivo é subordinado a esta relação de *colocar mais um*, apoiando, deste modo, o seu julgamento na ação transformadora e não mais no estado aparente (comprimento das filas).

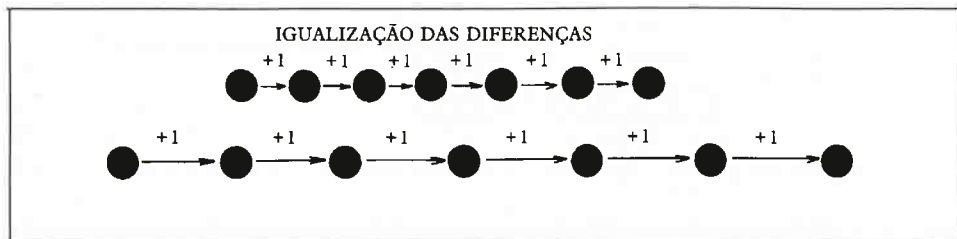


Figura 4.27 — A criança postula que a distância entre os elementos não determina modificação na quantidade de objetos de uma coleção.

Quando todos os intervalos entre os elementos se equivalem, a coordenação até então qualitativa (comprimento-densidade) assume o seu caráter de composição numérica, pela intervenção da noção de *unidade*. Assim, todos os elementos, apesar de serem distintos, por serem seriados, são também equivalentes uns aos outros; equivalem-se, pois, por serem cada um *um* elemento novo. Neste momento, se, por exemplo, foram trabalhados objetos de tamanhos diferenciados em duas coleções, a criança avaliará a quantidade corretamente, pois conceberá que cada ficha vale *uma ficha* e, assim, uma fila com seis fichas grandes terá a mesma quantidade de fichas do que uma outra com seis fichas pequenas.

A descoberta da "correspondência qualquer" ou propriamente aritmética supõe, portanto, sempre uma operação nova em relação à da simples lógica qualitativa; essa operação é a *igualização das diferenças*, ou, mais concretamente, a *colocação em série das unidades consideradas como iguais, por valerem cada uma "um", porém diferentes pela posição relativa e momentânea que cada uma ocupa na série*. A esta posição relativa e momentânea que cada elemento ocupa na série, Piaget chama de ordem vicariante, ou seja, é a ordem de apontar um elemento após o outro, sem repetir nenhum e sem deixar

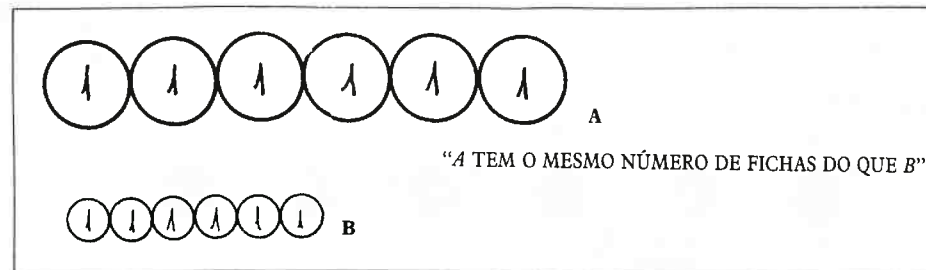


Figura 4.28 — A criança postula que o tamanho do objeto não influi na avaliação da quantidade de objetos de uma coleção.

algum de ser enumerado, com a compreensão de que não importa onde se comece, desde que todos os elementos sejam enumerados uma única vez.

Esta nova operação, aplicada sobre os elementos até então apenas individualizados, torna-os unidades simultaneamente iguais entre si e distintas. Tais unidades podem ser adicionadas enquanto equivalentes, e seriadas enquanto diferentes umas das outras. Enquanto equivalente e possível de ser adicionado, o número participa da classe; enquanto diferente e possível de ser seriado, o número participa das relações assimétricas. O número operatório implica, pois, a síntese recíproca dessas duas estruturas lógicas: classificação e seriação.

Neste nível operatório para a estrutura do número, além da criança conceber a noção da quantidade total, ao analisar, por exemplo, uma coleção de seis fichas, ela compreende que a quantidade seis permanece invariável, apesar de qualquer transformação que possa ser efetuada na disposição espacial dos seus elementos (unidades constitutivas avaliadas pelo valor numérico "um"). Portanto, a criança se torna capaz de postular a *inclusão hierárquica do número*, concebendo que uma coleção de seis fichas possui em si incluída outra de cinco elementos e concebe que "seis é maior do que cinco, pois seis é cinco mais um". O mesmo raciocínio está presente no julgamento de que "um" está incluído no "dois", o "dois" está incluído no "três", o "três" no "quatro"... Nessas condições, a criança passa a ter condições de anunciar as relações que se explicitam no quadro a seguir:

Piaget explicita que, apesar do número ser produto da classe e da relação assimétrica, isto não implica que as estruturas lógicas se consolidem anteriormente à formação do número. Ao contrário, o número também é necessário ao acabamento das estruturas lógicas. Assim, tanto a classe como a série se concluem ao mesmo tempo que o número, e sobre ele se apóiam tanto quanto o número se apóia sobre tais estruturas da lógica.

A hierarquia aditiva das classes, a seriação das relações e a generalização operatória do número (isto é, a construção dos números que ultrapassem os inteiros intuitivos 1, 2, 4 ou 5) constituem-se de maneira aproximadamente sincrônica por volta de 6 a 7 anos, no momento em que o raciocínio da criança começa a ultrapassar o nível pré-lógico inicial. É que a classe, a relação assimétrica e o número são as três manifestações complementares da mesma construção operatória aplicada, ou seja, as três equivalências e diferenças reunidas. Com efeito, é no momento em que a criança, havendo conseguido tornar móveis as avaliações intuitivas dos primórdios, atinge assim o nível da operação reversível que ela se torna simultaneamente capaz de incluir, seriar e enumerar. (Piaget, 1975, p.253.)

A AÇÃO NA ESCOLA

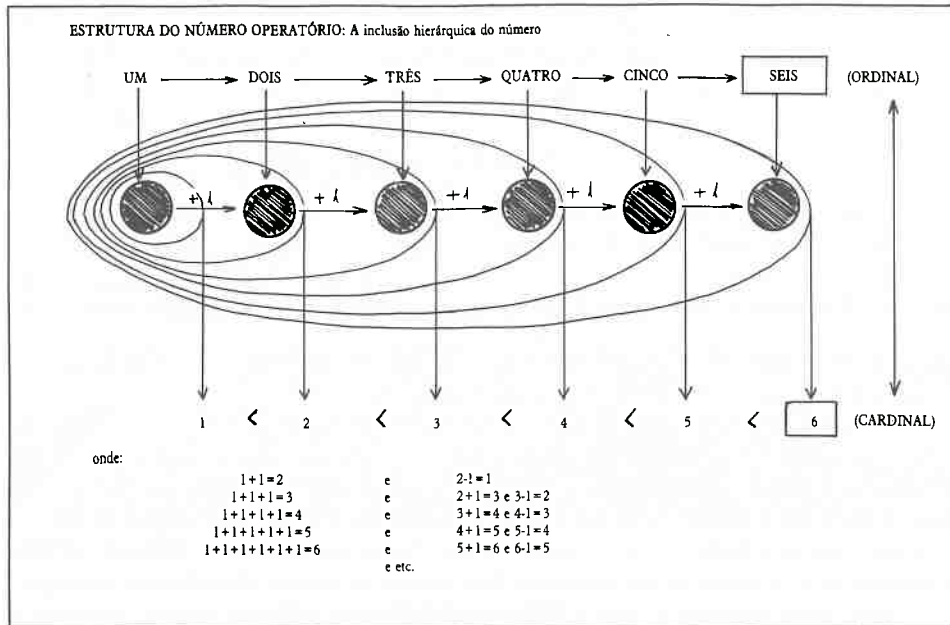


Figura 4.29 — A síntese operatória entre o caráter cardinal e ordinal do número.

Onde:

- O traçado pontilhado se torna cada vez mais denso em função do desenvolvimento próprio de cada estrutura; dos esquematismos sensório-motores à operação propriamente dita;
- O espiral representa as abstrações reflexivas (equilíbrio cada vez mais estável da assimilação e da acomodação) com origem na ação da criança, que impulsionam o desenvolvimento simultâneo e inter-relacionado dessas estruturas pela reversibilidade crescente do pensamento;
- A linha pontilhada do espiral explicita a reversibilidade do pensamento que vem sendo progressivamente anunciada até que se torna operatória (linha continuada);
- O ponto central explicita o momento em que o número se torna operatório (pela síntese recíproca da classe e da série), influenciando simultaneamente no acabamento da série e da classe.

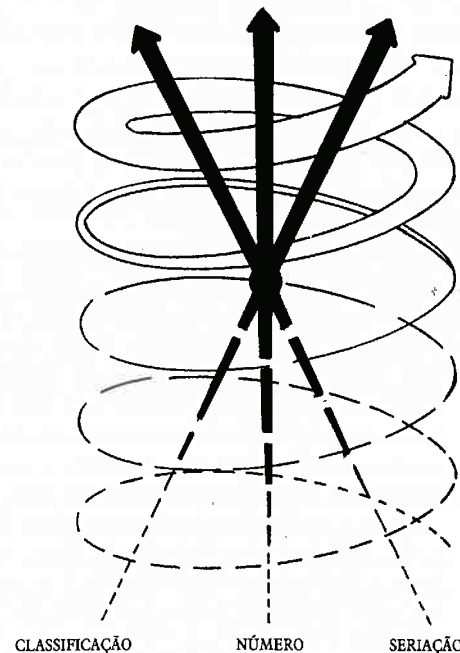


Figura 4.30 — A interdependência das estruturas lógicas e numéricas.

A INTERVENÇÃO NA ESCOLA

Metodologia da pesquisa

A pesquisa realizada junto às classes de 1ª série, em 1985, caracterizou-se como um estudo de caso, de natureza exploratória, que buscou aprofundar estudos da teoria desenvolvimentista de Jean Piaget na perspectiva de uma pesquisa *em ação*. Como tal, apoiou-se numa proposta teórica, mas buscou descobrir elementos emergentes que poderiam recontextualizar a teoria na dimensão do ensino desenvolvido na realidade escolar brasileira. Ainda na perspectiva de estudo de caso, a investigação incidiu sobre a compreensão de eventos particulares com vistas a propiciar generalizações naturalísticas.¹

O processo de compreensão desses eventos foi desenvolvido mediante observação participada, entrevistas não estruturadas, elaboração de protocolos das atividades de ensino-aprendizagem, levantamento de hipóteses explicativas e análises dos conteúdos informativos para explicação dos significados e orientação de novas decisões.

Como instrumental de análise, o estudo valeu-se, ainda, de técnicas quantitativas, considerando os níveis de aprendizagem matemática, o desenvolvimento cognitivo, a idade, os anos de escolaridade e as características sócio-econômicas das crianças.

Dentro das características do Programa Pericampus, essa investigação apresentou, por outro lado, a dimensão de pesquisa participante, por envolver os professores das classes-piloto do sistema de ensino de 1º grau, professores, alunos e egressos dos Cursos

1 — Generalizações naturalísticas são aquelas que se desenvolvem no âmbito da reflexão e da ação do indivíduo, em função de seu conhecimento experimental (André, E.D.A., 1982).