# Sistemas Lineares

**Sônia R. L. Garcia**

**Vídeo:**
**Método de Eliminação de Gauss e Condensação Pivoltal**
**reeditado em abril/2021**

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

# Sistemas Lineares

## Sistemas lineares de $n$ equações a $n$ incógnitas

- Forma não matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

**Cada equação com algum $a_{ij} \neq 0$**

00:17

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

# Sistemas Lineares

## Sistemas lineares de *n* equações a *n* incógnitas

- Forma matricial:

$$
\underset{\text{Matriz dos coeficientes}}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{Matriz dos termos independentes}}{b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{Matriz das incógnitas}}{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}
$$

$$
Ax = b \tag{2}
$$

- Matriz aumentada do sistema (1) ou (2):

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \tag{3}
$$

01:16

# Sistemas Lineares

## Sistemas lineares triangulares (superiores)

- Caso simples: sistema triangular (superior):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou seja, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad a_{kk} \neq 0, \forall k$$

e basta resolver "de baixo para cima".

# Sistemas Lineares

## Propriedades que transformam um sistema linear em outro sistema linear equivalente

- Operações básicas

  Não alteram o conjunto das soluções do sistema (1) ou (2):

  **(a)** Permutar a posição de duas equações do sistema [ou permutar a posição de duas linhas da matriz aumentada];

  **(b)** Multiplicar uma equação do sistema por um real $\neq 0$ [ou multiplicar uma linha da matriz aumentada por um real $\neq 0$ ];

  **(c)** Substituir uma equação por sua soma ou diferença com outra [ou substituir uma linha da matriz aumentada por sua soma ou diferença com outra].

# Sistemas Lineares

## Propriedades que serão usadas no Método de Eliminação de Gauss

- Composição de operações básicas

  Serão usadas no Método de Eliminação de Gauss:

  **(a)** Permutar a posição de duas equações do sistema
  [ou permutar a posição de duas linhas na matriz aumentada];

  **(e)** Subtrair de uma equação do sistema um múltiplo de outra
  [ou subtrair de uma linha da matriz aumentada um múltiplo de outra].

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- **Obtenção de um sistema triangular equivalente:**

Entrada: Saída:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{operações básicas}} \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- **Método de Eliminação de Gauss**: aplicação do procedimento anterior de uma forma sistematizada.
- $n-1$ etapas, "acrescentando", em cada uma delas, uma nova coluna de zeros abaixo da diagonal principal.
- **Primeira etapa:**

Entrada: Saída:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

09:07

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- ***k*-ésima etapa:**

$$\text{Entrada: } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} & \alpha_{k-1,k} & \alpha_{k-1,k+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nk} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \text{Saída: } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} & \alpha_{k-1,k} & \alpha_{k-1,k+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix}.$$

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- Detalhes da **primeira etapa**

- **Caso 1:** Entrada: $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$

  Nada a ser feito.

- **Caso 2:** Entrada: $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \dots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ \underline{a_{\ell 1}} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$ ,

  linha do pivô da etapa

  $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{\ell-1,1} = 0 \quad a_{\ell 1} \neq 0$ :

  pivô da etapa

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- **Caso 2:** Entrada: $\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$ ← linha do pivô da etapa

$a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{\ell-1,1} = 0$ $\quad a_{\ell 1} \neq 0$ ← pivô da etapa

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída: } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \cdots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{\ell 1}} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{linha do pivô da etapa} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{era linha 1} \\ \\ \\ \end{array}$$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

16:00

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- **Caso 2:** Entrada: $\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$ ← linha do pivô da etapa

$a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{\ell-1,1} = 0 \quad a_{\ell 1} \neq 0$

pivô da etapa

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída: } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \cdots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \cdots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} & \begin{matrix} \longleftarrow \text{linha do pivô da etapa} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{era linha 1} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, \; i = 2, \ldots, n.$$



16:15

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Saída: $\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \ldots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \ldots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$

$\longleftarrow$ linha do pivô da etapa

$\longleftarrow$ era linha 1

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

16:46

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída: } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \ldots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \ldots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{linha do pivô da etapa} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{era linha 1} \\ \\ \\ \end{array}$$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

17:05

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída: } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \dots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{linha do pivô da etapa} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{era linha 1} \\ \\ \\ \end{array}$$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \dots, n.$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} - m_{21} a'_{12} & \dots & a''_{2n} - m_{21} a'_{1n} & b''_2 - m_{21} b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n2} - m_{n1} a'_{12} & \dots & a''_{nn} - m_{n1} a'_{1n} & b''_n - \dots \end{bmatrix}.$$

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída: } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \ldots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \ldots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{linha do pivô da etapa} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{era linha 1} \\ \\ \\ \end{array}$$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} - m_{21} a'_{12} & \ldots & a''_{2n} - m_{21} a'_{1n} & b''_2 - m_{21} b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n2} - m_{n1} a'_{12} & \ldots & a''_{nn} - m_{n1} a'_{1n} & b''_n - \ldots \end{bmatrix}.$$

$$a''_{21} - m_{21}\, a'_{11}$$

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Saída:
$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \ldots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \ldots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

$\longleftarrow$ linha do pivô da etapa

$\longleftarrow$ era linha 1

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}},\ i = 2, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} - m_{21} a'_{12} & \ldots & a''_{2n} - m_{21} a'_{1n} & b''_2 - m_{21} b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n2} - m_{n1} a'_{12} & \ldots & a''_{nn} - m_{n1} a'_{1n} & b''_n - \end{bmatrix}.$$

18:05

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

21:48

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- Armazenamento

É conveniente guardar os multiplicadores $m_{i1}$ nos locais dos zeros (da primeira coluna, na etapa 1):

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ m_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ m_{21} & a''_{22} - m_{21}a'_{12} & \dots & a''_{2n} - m_{21}a'_{1n} & b''_2 - m_{21}b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & a''_{n2} - m_{n1}a'_{12} & \dots & a''_{nn} - m_{n1}a'_{1n} & b''_n - m_{n1}b'_1 \end{bmatrix}.$$

Computacionalmente, é conveniente armazenar na mesma matriz aumentada o resultado obtido passo a passo, economizando espaço:

Alerta — Editado

- Alerta:
  Nas outras etapas, ao fazer troca de linhas, trocar a "linha toda" (com os multiplicadores armazenados), e não apenas "a parte da linha que está na submatriz associada àquele passo".

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- ***k*-ésima etapa:**

$$\text{Entrada: } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} & \alpha_{k-1,k} & \alpha_{k-1,k+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nk} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow$$

22:03

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- ***k*-ésima etapa:**

$$
\text{Entrada:}\quad
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} & \alpha_{k-1,k} & \alpha_{k-1,k+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1} \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_{nk} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n
\end{bmatrix}
\longrightarrow \ldots
$$

$$
\ldots \longrightarrow \text{Saída:}\quad
\begin{bmatrix}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} & \alpha_{k-1,k} & \alpha_{k-1,k+1} & \cdots & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1} \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n
\end{bmatrix}.
$$

- **Detalhes da $k$-ésima etapa:**

Submatriz de entrada: $\begin{bmatrix} \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nk} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots$

$\ldots \longrightarrow$ Submatriz de saída: $\begin{bmatrix} \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix}.$

**1.** Calcula-se a linha do pivô, digamos, linha $u$, guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $u$:

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- **Detalhes da $k$-ésima etapa:**

Submatriz de entrada: $\begin{bmatrix} \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ \alpha_{k+1,k} & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nk} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots$

$\ldots \longrightarrow$ Submatriz de saída: $\begin{bmatrix} \alpha_{kk} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{bmatrix}.$

**1.** Calcula-se a linha do pivô, digamos, linha $u$, guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $u$:

$p_k = \begin{cases} u, & \text{se houve troca de linhas,} \\ k, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

**2.** Calcula-se os multiplicadores da etapa $k$:

$$m_{ik} = \frac{a''_{ik}}{a'_{kk}}, i = k+1, \ldots, n.$$

e obtém-se a submatriz e também a matriz aumentada escalonadas.

# Sistemas Lineares

## Condensação Pivotal

- "solução aproximada" $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ pode ser muito diferente da "solução exata" $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ (devido à aritmética de ponto flutuante).
- Condensação pivotal: Artifício usado para tentar minimizar a influência dos erros de arredondamento.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38 \end{aligned}$$

solução exata $x = (1, 1, 1)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

com três algarismos significativos,

solução obtida é $x = (4.5, 0.0, 1.01)$

Sem condensação pivotal

com três algarismos significativos,

solução obtida é $x = (1.0, 0.998, 1.0)$.

Com condensação pivotal

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

- Detalhes da **primeira etapa**

- **Caso 1:** Entrada:
$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Nada a ser feito.

- **Caso 2:** Entrada:
$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \dots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

~~linha do pivô da etapa~~

$a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{\ell-1,1} = 0$  $a_{\ell 1} \neq 0$ :

~~pivô da etapa~~

**Condensacão Pivotal:**

**Em cada etapa, em vez de escolher linha do pivô usando o critério de que o pivô seja não nulo, usar o critério de que o pivô tenha o maior módulo possível.**



26:28

SistemasLineares-MAP3121-2021.mp4

# Sistemas Lineares

## Método de Eliminação de Gauss

**Com Condensação Pivotal:**

**Escolha de linha do pivô de outra forma! Escolher para que o valor absoluto seja máximo!**

**1.** Guarda-se a informação em $p = (p_1, \ldots, p_{n-1})$ e permuta-se as linhas 1 e $\ell$:

$$p_1 = \begin{cases} \ell, & \text{se houve troca de linhas,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{Saída:} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \ldots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \ldots & a_{\ell n} & b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{\ell-1,2} & \ldots & a_{\ell-1,n} & b_{\ell-1} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

← ~~linha do pivô da etapa~~

**Outro critério!!**

← ~~era linha 1~~

**2.** Calcula-se os multiplicadores da primeira etapa e completa-se a etapa:

$$m_{i1} = \frac{a''_{i1}}{a'_{11}}, i = 2, \ldots, n.$$

← — **FICAM COM MÓDULO ≤ 1**

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a''_{22} - m_{21} a'_{12} & \ldots & a''_{2n} - m_{21} a'_{1n} & b''_2 - m_{21} b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n2} - m_{n1} a'_{12} & \ldots & a''_{nn} - m_{n1} a'_{1n} & b''_n - \ldots \end{bmatrix}.$$

27:32