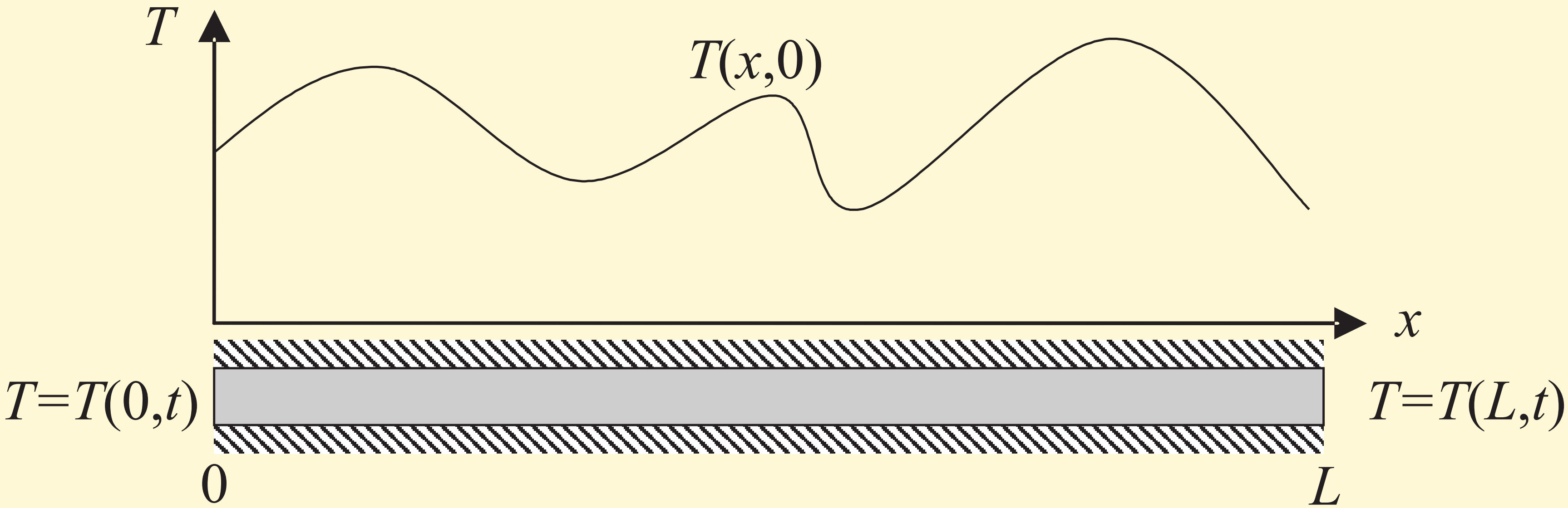
A Equação do Calor

Solução por Diferenças Finitas

Aerodinâmica Computacional

Equação do Calor



A equação para condução de calor unidimensional pode ser escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

onde $T(x,t)$ é a distribuição de temperatura na direção x em um instante de tempo t e α é o coeficiente de difusividade térmica.

Solução Explícita

Essa equação pode ser reescrita, usando diferenças finitas, como

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Rearranjando obtem-se

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

que é uma forma explícita para a solução da equação.
A solução é estável se

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Solução Implícita

Também é possível resolver a equação na forma implícita usando o método de Crank-Nicolson:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{(T_{i+1}^{n+1} + T_{i+1}^n) - 2(T_i^{n+1} + T_i^n) + (T_{i-1}^{n+1} + T_{i-1}^n)}{2(\Delta x)^2}$$

Rearranjando obtem-se

$$-T_{i+1}^{n+1} + 2(C+1)T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1} = T_{i+1}^n + 2(C-1)T_i^n + T_{i-1}^n$$

onde

$$C = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t}$$

Condições de Contorno e Inicial

A condição inicial é dada por

$$T_i^0 = T(x_i, 0) \ \ , \ \ i = 1, 2, ..., N$$

e as condições de contorno por

$$T_1^n = T(0, t^n) \ \ , \ \ n = 0, 1, 2, ...$$

e

$$T_N^n = T(L, t^n) \ \ , \ \ n = 0, 1, 2, ...$$

Exemplo

Resolver a equação do calor com

$$T(x,0) = sen(\frac{\pi}{L}x) \ \ , \ \ 0 \leq x \leq L$$

e

$$T(0,t) = T(L,t) = 0$$

A solução analítica é

$$T(x,t) = e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} sen(\frac{\pi}{L}x)$$