Aula 1

12/03/20

Transição clássico-Quântico

* Física clássica permiti dintinguir "objetos" físicos como partículas ou ondas

FÍSICA CLÁSSICA

PARTÍCULAS

- Mec. Newtoniana
- " Lagrangeana
- Hamitoniana
- Hamilton-Jacobi

Ondas

- Eq. de Ondas
  - meios elásticos (mecânica)
  - Vácuo (eletromag)

Ex. Eq. Maxwell, Helmholtz ondas em córdas, fluidos... SOM, etc...

* PARTÍCULAS ⇓ objetos c/ propriedades
- massa, carga, etc

$(m, x, p, \ldots)$

⇒ • Forças { conservativas: $-\nabla V(x)$ ← potencial ; ñ conservativas

Descrição das partículas é geralmente dada pela Mec. Newtoniana (que) contém toda a mecânica clássica (descrevem) embora exista outras formulações

$$\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{F:\ \text{Força Result.}} = m\ddot{\vec{x}}$$

⇓

Mec. Analítica (Mec. clássica Moderna) desenvolvida Sec. XVII -

- → Conhecida todas as forças (resultante), pode-se descrever completamente movimento (futuro & passado...)
- → Energia total é uma (quantidade) variável contínua
- → Completo determinismo posição, momento, energias...

⇓

NÃO SATISFEITOS NA MQ !! (em geral)

* **Ondas**: Fenômenos Ondulatórios { ∘ Ondas Mecânicas → som; ∘ " EEM → Maxwell...

- **Eq. de Onda** (clássica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1D)$$

c ↑ veloc. de propagação

CONTEXTO HISTÓRICO

→ Atribuída à descoberta por D'Alembert (1717)
Jean Baptiste le Rond d'Alembert

*Notação compacta

$$\boxed{\ddot{u} = c^2 \nabla^2 u} \quad (3D)$$

∇^2 → operador Laplaciano

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \underbrace{\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u\right)}_{\text{coord. cartesianas}}$$

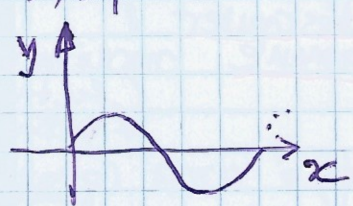
Exemplo: Eq. de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{(Gauss)}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{(FARADAY)}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Ampère - Maxwell)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 E = \epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla^2 B = \epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Exemplo 2: onda numa corda (1D) tensionada (Ex. violão)



$$\ddot{y} = c\,\partial_x^2 y \Rightarrow c = \sqrt{\frac{F}{\mu_L}}$$

F ← Força { tração / tensão

μ_L ← dens. massa linear [kg/m]

⇒ **Propriedades das Ondas:**

*(!!) → NÃO É DESCRITA por MASSA, carga etc...
Mas sim: Amplitudes & { Comprimento onda ou Frequência, fase...

/ /

Objetos Físicos (clássicos)
- Partículas: Massa, momento, posição
- Ondas: Amplitude, comp. onda, freq., fase

(*) Soluções Ondulatórias: são dadas p/ resolução de equações de onda sujeita às condições contorno

→ Eq. de Onda + Contorno ⇒ Soluções

* ⇒ Nem todas as Freq. / compr. onda são permitidos num dado problema (depende do contorno)

(⇒ "DISCRETIZAÇÃO" e "QUANTIZAÇÃO" x soluções contínuas)

→ Exemplos: Notas musicais (corda violão / piano, etc...)

- Relações de Incerteza (clássica)

→ P/ qualquer onda, vale as relações

$$\begin{cases} (i) \quad \lambda \cdot \nu = v \\ (ii) \quad \Delta x \cdot \Delta k \geq 1 \end{cases} ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(relação Fourier)

→ * Pacotes de Ondas (localizados) ⇒ Relação de Heisenberg

- Propriedades (Efeitos) Ondulatórias

Efeitos "únicos":

→ Interferência
→ Difração
→ Superposição

⇒ Na física clássica Ondas e Partículas são bastante Distintas

• **Dualidade onda-Partícula** (pistas da Óptica)

Luz = { • Ondas Eletromag (Maxwell)
 • partículas (fótons : $\epsilon = h\nu$, $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$)

⇒ Evolução histórica (Newton, Huygens/Fresnel, Young, Maxwell, Einstein/Planck) dos conceitos/compreensão da Luz converge p/ aceitação de um caráter dual (onda-partic)

→ CARACTERÍSTICAS ondulatórias se revelam apenas qdo Dimensões características são MENORES que (λ) assoc. à partícula

⇒ ou qdo Luz "interage com a Matéria" !! (em certos contextos, como iremos discutir)

↳ Questões Relevantes:

* Limite da Óptica Geométrica

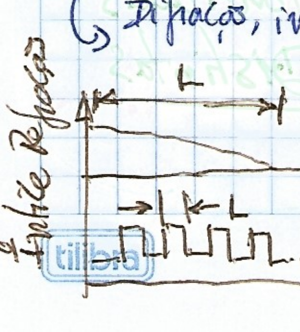
→ Seria possível objetos que se parecem partículas ser realmente Ondas, mas que em condições "normais" (usuais) sua natureza ñ seja revelada?

→ É possível que "Leis Físicas" (equações) da Mec. Clássica sejam "apenas" aproximações de "

Óptica ondulatória x Geométrica

↳ Reflexão, Refração, lentes etc... ⇒ Geométrica

↳ Difração, interferênc. ⇒ Ondulatória



L >> λ ⇒ Geométrica

L ≲ λ ⇒ Ondulatória

ESCALA VARIAÇÃO do Índice de Refração

Contexto histórico

→ Essas questões já ocorriam no Século 19 (XIX), especialmente após desenv. do formalismo de Hamilton-Jacobi...

Porém, NÃO haviam evidências experimentais suficientes naquele momento.

Breve Revisão da Mec Clássica

(→ Revisar formalismos da Mecânica Analítica)

- 2 Benefícios

    (i) Abordagem + "natural" e Universal p/ eq. movimento

    (ii) Mapear eq. Mov. clássicas → Quânticas (prescrição)

    → PARÊnteses Poisson ⇝ Heisenberg

    → Eq. Hamilton-Jacobi ⇝ Schrödinger

(*) Mapear não é "provar" ...

- **Eq. de Lagrange**:

Coord. generaliz. (desacopladas)

$$\begin{cases} r_i \to q_i \ ; \ v_i \to \dot{q}_i \\ \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \quad \text{(Lagrangeana)} \end{cases}$$

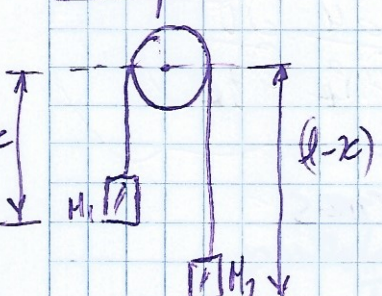
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_i}}$$

CÁLculo de VARIAÇÕES (VARIACIONAL) *

↳ Como $T(\dot{q})$, q^do^ potencial V ñ depende de $\dot{q}_i$ (i.e.: é apenas função da posição)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Exemplo:



$$V = -M_1 g x - M_2 g (l-x)$$

$$T = \frac{1}{2}(M_1+M_2)\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(M_1+M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l-x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (M_1 - M_2) g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M_1+M_2)\dot{x}$$

$$\to (M_1+M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2) g$$

$$\ddot{x} = \frac{(M_1 - M_2)}{(M_1+M_2)} g$$

tilibra

(Hamiltoniana)

• Eq. de Hamilton

$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) \rightarrow H(p,q,t)$

onde $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ (momento generaliz) (momento canônico)

$$H(p,q,t) = \underbrace{\sum_i \dot{q}_i\, p_i}_{=2T} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$$

$$\Rightarrow H = 2T - (T-V) = T+V \equiv \text{Energia total}$$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Forma canônica das equações de Hamilton

Eq. 1ª ordem

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$\Rightarrow$ Uma vez que $H(p,q,t)$ é conhecido (a partir da Lagrangeana) resolve-se o sistema eq. dif. 1ª ordem.

→ PARÊNTESES de Poisson:

Definição: $$\{u,v\}_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

As variáveis u e v definidas em termos das coordenadas generalizadas q e p

⇒ Propriedades do P.P.:

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad \text{(anti-comutativo)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{p_i, p_j\} = 0 \quad e \quad \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \end{cases}$$

Além disso; p/ funções gerais u, v, w:

$$\{u, u\} = 0$$

$$\{u+v, w\} = \{u, w\} + \{v, w\}$$

$$\{u, v.w\} = \{u, v\}w + v\{u, w\}$$

$$\{u, c\} = 0 \rightsquigarrow \text{se } \underline{c} \text{ for independente de } \underline{q} \text{ e } \underline{p}$$

⇒ **Reescrevendo Eq. Hamilton em termos dos P. Poisson:**

$$\begin{cases} \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\} \end{cases}$$

* ⇒ QUANTIZAÇÃO: procedimento p/ quantizar (clássico-quântico) é:

$$\{u, v\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[u, v]$$

parênteses Poisson (clássico)

Comutador dos op. (observ.) (mec. quântica)

• Formulação de Hamilton-Jacobi

→ Ápice da mecânica analítica

→ Permite "quantizar" descrição clássica na repres. Schroedinger

• Eq de Hamilton-Jacobi:

Ideia é achar...
→ transformação canônica que deixa Hamiltoniana transf. idênticamente nula → const. mov.

$$(q,p) \xrightarrow{T.C.} (Q,P)$$

$$H(q,p,t) \longrightarrow K(Q,P,t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \to Q_i = \beta_i \text{ (constantes)} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \to P_i = \alpha_i \text{ (constantes)} \end{cases}$$

soluções triviais (const. determinadas p/ cond. de ~~contorno~~ iniciais)

usando...
T.C. inversa:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q,P,T) \Rightarrow q_i(t) = q_i(\beta,\alpha,t) \\ p_i &= p_i(Q,P,T) \Rightarrow p_i(t) = p_i(\beta,\alpha,t) \end{aligned}\right\}$$ ← depende 2N const.

→ Busca-se uma função geradora $S(q,P,t)$ onde

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

e Hamiltoniana transformada é dada por

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

→ Para que $K = 0$, S deve satisfazer

$$H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad , \quad \text{usando } p_i = \frac{\partial S}{q_i} \ \ldots$$

temos a eq. $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\underbrace{H\left(q_1,\ldots,q_N,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_N},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}_{\text{Eq. de Hamilton-Jacobi (HJ)}}$$

Portanto, a eq. H.J. constitui uma eq. dif. parcial de 1º ordem em $(n+1)$ variáveis $\{q_1, q_2, \ldots q_N, t\}$ p/ a função geradora S.

⇒ Reduz-se de um problema com $2N$ eq. dif. ord. de 1º ordem p $\underline{1}$ eq dif. parc. com $(N+1)$ variaveis

Para encontrar as soluções das eq. de Hamilton basta encontrar soluções particulares na forma $S(q_i, \alpha_i, t)$, de acordo com o teorema J.

Teorema de Jacobi:

Se $S(q, \alpha, t)$ é uma *solução integral completa $\left[\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0 \right]$ da eq. de HJ, então os q_i e p_i definidos por:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

são soluções da eqs. de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Exemplo: osc. harmônico ⇒ *Ver vídeo (Aula 6) de Nivaldo Lemos - Mec. Analítica (UFF) no YouTube

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \right]$$

substitui-se...

⇒ O formalismo HJ permite descrever o mov. de uma partícula em termos de uma descrição ondulatória ("wave-like")
É a única formulação (matemática) clássica a fazer isso...

Prescrição p/ quantização:

HJ → Limite λ pequeno ⇒ Repres. completa → Eq. Schrödinger (Mec. ondulatória)

H + P. Poisson → observáveis físicos ñ comutam → Subst. P.P { } → Comutadores
Descrição completa (quântica) de Heisenberg