Apêndice A

Integral $\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Vamos obter a primitiva da integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{A.1}$$

Fazemos a seguinte mudança de variável: $y \to a$ onde $a = \sqrt{x^2+y^2} + y$. Assim temos

$$\begin{aligned} \to \sqrt{x^2+y^2} &= (a-y) && \text{(A.2)} \\ \frac{da}{dy} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{(a-y)} \\ \to dy &= \frac{(a-y)}{a} da && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int \frac{1}{(a-y)} \frac{(a-y)}{a} da = \log a = \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) \tag{A.4}$$

Vamos agora derivar a resposta para checar que o integrando é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) &= \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2} + y)} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2} + y)} \left[\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \checkmark \end{aligned} \tag{A.5}$$

Portanto

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log(\sqrt{x^2+y^2} + y) \tag{A.6}$$