Capítulo 11

Ondas Eletromagnéticas

11.1 Equação de Onda Mecânica: Corda

Considere um pulso de onda que se propaga em uma corda esticada com extremidades fixas. Podemos obter a equação de ondas nesse caso usando a segunda Lei de Newton em um elemento da corda de comprimento Δx, e altura vertical $u(x,t)$, conforme a Fig.11.1.

Primeiramente, temos que a força horizontal no elemento de corda é nula, já que este não se movimenta nesta direção. Pela figura, cada lado do elemento tem uma força dada por $H(x) = T\cos\theta$ e $H(x+\Delta x) = T\cos\theta'$. Temos então

$$H(x+\Delta x,t) - H(x,t) = 0 \quad \to \quad H(x) \text{ const.} \tag{11.1}$$

Já na direção vertical, as forças verticais $V(x) = T\sin\theta$ e $V(x+\Delta x) = T\sin\theta'$ se somam para acelerar a corda de acordo com a segunda Lei de Newton

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= ma \\ V(x+\Delta x,t) - V(x,t) &= (\lambda\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{V(x+\Delta x,t) - V(x,t)}{\Delta x} &= \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{11.2}$$

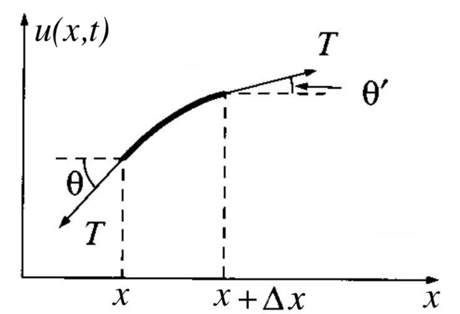

Figura 11.1: Força de tensão sobre um elemento de uma corda oscilante. Na horizontal, a força é nula, pois a corda não se move nessa direção. Na vertical, a força é dada pela segunda Lei de Newton, causando oscilação na corda. (Griffiths)

Tomando o limite $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{11.3}$$

Note agora que

$$V = T\sin\theta = T\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = H\tan\theta \tag{11.4}$$

Como $\tan\theta = \partial u/\partial x$, temos $V = H\ \partial u/\partial x$ e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{11.5}$$

E como H não depende de x, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{H}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{11.6}$$

Vamos checar a unidade da combinação λ/H:

$$\left[\frac{\lambda}{H}\right] = \frac{[M][L]^{-1}}{[M][L][T]^{-2}} = \frac{1}{[L^2][T]^{-2}} = \frac{1}{[\text{velocidade}]^2} \tag{11.7}$$

Portanto, λ/H tem dimensão de velocidade; como veremos a seguir ela é a velocidade de propagação da onda na direção x. Denotando então $v = \lambda/H$, obtemos finalmente a Equação de Onda em uma corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(Equação de Ondas na Corda)} \tag{11.8}$$

11.2 Equação de Ondas Eletromagnéticas

11.2.1 Solução no Vácuo

- No vácuo, i.e. na ausência de cargas ($\rho = 0$) e correntes ($j = 0$), as Eqs. de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \tag{11.9}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{11.10}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{11.11}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{11.12}$$

- Temos então

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \\
&= -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{B})}{\partial t} \\
&= -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,, \tag{11.13}$$

ou, definindo $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$,

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{11.14}$$

- O mesmo procedimento nas equações para $\vec{B}$ leva a

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{11.15}$$

i.e., no vácuo os campos E e B se propagam satisfazendo a equação de ondas clássica em 3 dimensões com velocidade $v = c$.

- Inserindo valores numéricos obtemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{m/s} \tag{11.16}$$

i.e. a velocidade de propagação, que resulta de quantidades puramente eletromagnéticas, é idêntica à velocidade da luz no vácuo.

- Isso quer dizer que a luz é exatamente uma onda eletromagnética se propagando: **unificação do eletromagnetismo e da ótica**.

- Questão: c é a velocidade da luz com relação a que referencial? A resposta a esta pergunta levou Einstein a desenvolver a Relatividade Especial e, com ela, revolucionar a física clássica no início do século XX.

- Note que a Eq. 11.14 é vetorial e, portanto, cada componente de $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ satisfaz uma equação de onda. Idem para $\vec{B}$.

- Por exemplo, se $E_x = E_x(z,t)$ é função apenas da coordenada z e do tempo t, mas não de x e y, e $E_y = E_z = 0$, temos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{11.17}$$

Solução

Pode-se verificar que

$$E_x(z,t) = F(z \pm ct)\,, \tag{11.18}$$

onde F é uma função qualquer, satisfaz a Eq. de onda unidimensional acima. Definindo $\delta_\pm = z \pm ct$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\frac{\partial \delta_\pm}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \delta_\pm} \\
\to \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\right) = \frac{\partial}{\partial \delta_\pm}\left(\frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\right)\frac{\partial \delta}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial \delta_\pm^2} \\
\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\frac{\partial \delta_\pm}{\partial t} = \pm c\frac{\partial F}{\partial \delta_\pm} \\
\to \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm c\frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\right) = \frac{\partial}{\partial \delta_\pm}\left(\pm c\frac{\partial F}{\partial \delta_\pm}\right)\frac{\partial \delta_\pm}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 F}{\partial \delta_\pm^2}
\end{aligned}$$

que, portanto, satisfaz a Eq. de ondas.

Para encontrar $\vec{B} = \vec{B}(z,t)$, consideremos a Eqs. de Maxwell:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \quad \to \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \to \quad \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0\right) = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \to \quad \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, 0, 0\right)
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Essas equações implicam

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0\,, \tag{11.20}$$

Portanto B_x e B_z são constantes no espaço e no tempo. Como estamos interessados apenas na parte oscilante dos campos, por simplicidade vamos tomar $B_x = B_z = 0$. Resta somente a componente B_y, para a qual temos as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}\,, \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\,, \end{aligned} \tag{11.21}$$

Inserindo, e.g. $E_x(z-ct)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial \delta_-} = \frac{\partial (E_x/c)}{\partial \delta_-}(-c) = \frac{\partial (E_x/c)}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial \delta_-}(-c) = \frac{\partial (E_x/c)}{\partial \delta_-} = \frac{\partial (E_x/c)}{\partial z} \end{aligned} \tag{11.22}$$

Essas duas equações implicam, desconsiderando soluções constantes, $B_y(z,t) = E_x(z,t)/c$, i.e.

$$\vec{E}(z,t) = F(z-ct)\hat{x} \tag{11.23}$$

$$\vec{B}(z,t) = \frac{F(z-ct)}{c}\hat{y} = \frac{1}{c}\hat{z}\times\vec{E} = \frac{\vec{c}}{c^2}\times\vec{E} \tag{11.24}$$

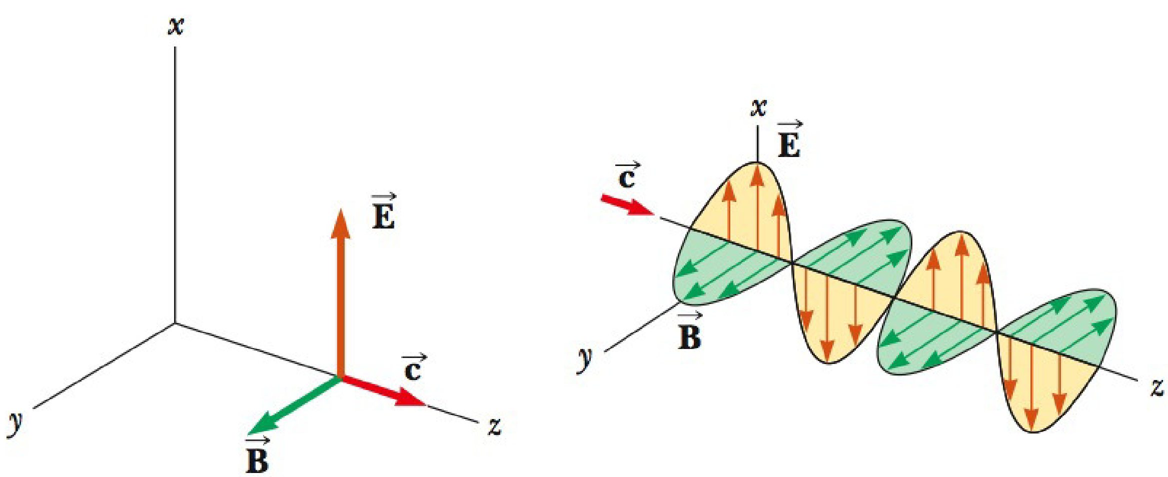

Figura 11.2: Propagação de ondas eletromagnéticas. Os campos E e B são perpendiculares entre si e a direção de propagação. (Serway)

Os campos se propagam ortogonais entre si e com a direção de propagação: $\vec{E}\times\vec{B} \propto \vec{c}$.

A solução $F(z-ct)$ representa uma onda "progressiva", i.e. se propagando "para frente". Considere, e.g. a origem $z=0$ em $t=0$, que tem altura $E_x(0,0) = F(0)$. Após um tempo $t = \delta t$, a coordenada $z = c\delta t$ terá a mesma altura $E_x(c\delta t, \delta t) = F(c\delta t - c\delta t) = F(0) = E_x(0,0)$. Ou seja, a altura está se propagando no espaço com velocidade c. Similarmente, $F(z+ct)$ representa uma onda "regressiva".

Ondas Planas

As soluções correspondendes a *ondas planas* monocromáticas são dadas por uma forma específica da função F dada em termos de senos/cossenos:

$$E_x(z,t) = A\cos[k(z \pm ct)] = A\cos(kz \pm \omega t)\,, \tag{11.25}$$

onde $\omega = kc$. Definindo $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$, onde λ é o comprimento de onda, T o período e ν a frequência da onda, temos $c = \lambda/T = \omega/k$. Luzes de diferentes cores correspondem a onda de diferentes frequências, formando um espectro eletromagnético (Fig 11.3).

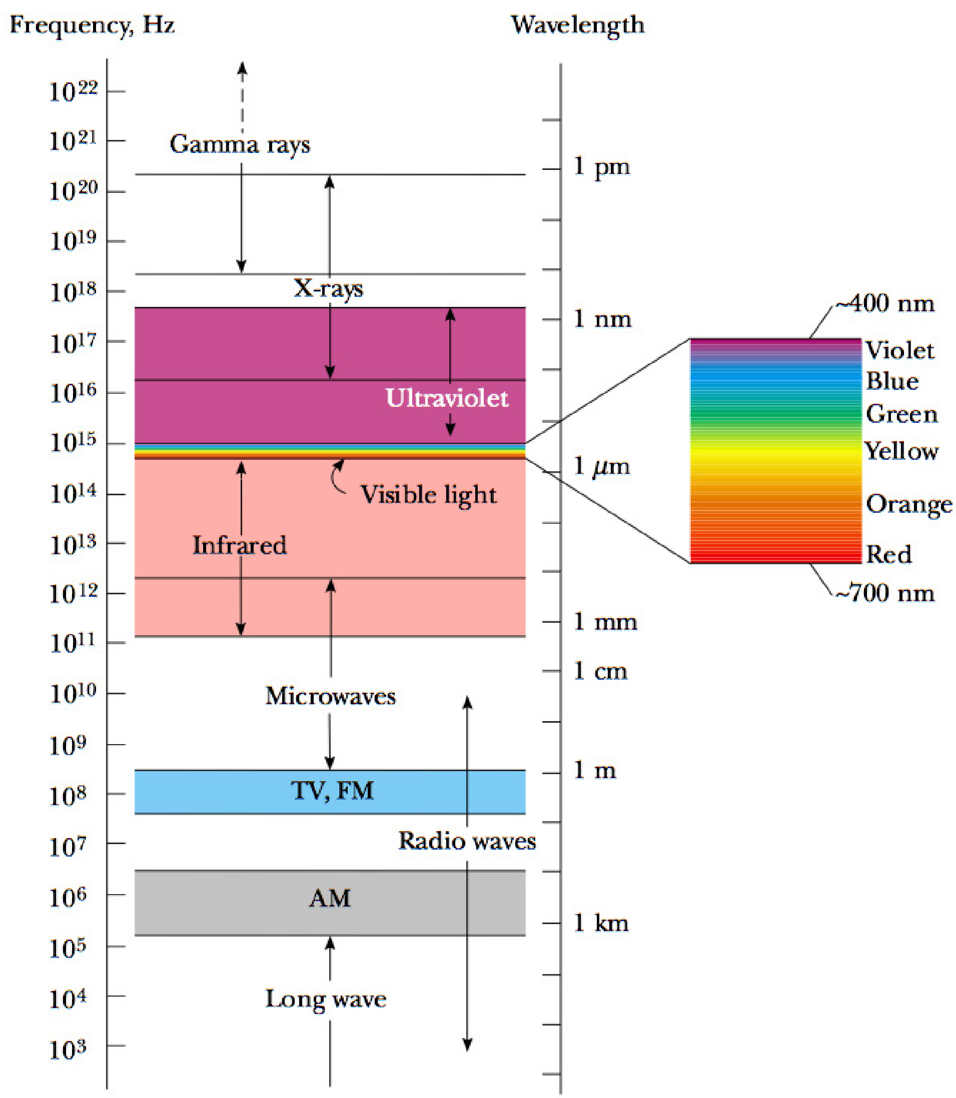

Figura 11.3: Espectro Eletromagnético. (Serway)

11.2.2 Solução Geral

Vamos agora considerar o caso geral em que a propagação dos campos ocorre na presença de cargas e correntes. Neste caso, as Equações de Maxwell são

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Usando a definição de potenciais eletromagnéticos, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} \\
&= \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (11.26)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\
&= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\
&= \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \qquad (11.27)
\end{aligned}$$

Essas duas equações implicam portanto

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \qquad (11.28)
\end{aligned}$$

Escolhendo o calibre de Lorenz, em que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (11.29)$$

e, usando $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, as equações se tornam

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (11.30)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \qquad (11.31)$$

i.e. os potenciais se propagam de acordo com equações de onda não-homogêneas.

Vimos que, no vácuo, os próprios campos satisfazem a equação de onda homogênea. Vemos agora, que, no vácuo, os potenciais também satisfazem a equação de onda homogênea.

Aqui não nos preocuparemos em encontrar a solução destas equações, já que estaremos interessados apenas no caso mais simples da solução no vácuo. Para detalhes, ver Apêndice N.

11.3 Energia de Ondas Eletromagnéticas

Vimos que a densidade de energia eletromagnética (energia por unidade de volume) $u_{EB} = u_E + u_B$ é dada por

$$u_{EB} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{11.32}$$

E sua derivada temporal fica (usando $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$):

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{11.33}$$

Das Eqs. de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && (11.34) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (11.35) \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente a primeira por $\vec{E}/\mu_0$ e a segunda por $\vec{B}/\mu_0$ (para aparecer termos que queremos), temos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\vec{E} \cdot \nabla \times B}{\mu_0} - \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}}{\mu_0} && (11.36) \end{aligned}$$

e portanto, a equação de densidade de energia fica

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} \right] \tag{11.37}$$

Agora considere a identidade:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \nabla \cdot (E_y B_z - E_z B_y, E_z B_x - E_x B_z, E_x B_y - E_y B_x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(E_y B_z - E_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(E_z B_x - E_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_x B_y - E_y B_x) \\ &= B_z \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - E_z \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ &\quad B_x \frac{\partial E_z}{\partial y} + E_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_z \frac{\partial E_x}{\partial y} - E_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ &\quad B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x \frac{\partial E_y}{\partial z} - E_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ &= B_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &\quad -E_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - E_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &= B_x (\nabla \times E)_x + B_y (\nabla \times E)_y + B_z (\nabla \times E)_z \\ &\quad -E_x (\nabla \times B)_x - E_y (\nabla \times B)_y - E_z (\nabla \times B)_z \\ &= \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} && (11.38) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) \tag{11.39}$$

Definindo o vetor de Poynting $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{(Vetor de Poynting)} \tag{11.40}$$

temos

$$\frac{\partial u_{EB}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \nabla\cdot\vec{S} \tag{11.41}$$

Vamos interpretar o primeiro termo no lado direito. Lembre que a Força de Lorentz sobre uma carga q é:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{11.42}$$

O trabalho W feito por essa força altera a energia mecânica da carga de ΔU_{mec}. Portanto o trabalho por unidade de tempo (potência) feito por essa força sobre a carga muda sua energia mecânica de:

$$P = \frac{\partial U_{\text{mec}}}{\partial t} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{v}\cdot\vec{E} \tag{11.43}$$

Assim, o trabalho por unidade de tempo e por unidade de volume, fica (usando $\rho = q/\Delta\text{vol}$ e $\vec{j} = \rho\vec{v}$)

$$\frac{P}{\Delta\text{vol}} = \frac{\partial u_{\text{mec}}}{\partial t} = \frac{q}{\Delta\text{vol}}\vec{v}\cdot\vec{E} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{j}\cdot\vec{E} \tag{11.44}$$

Portanto, $\vec{j}\cdot\vec{E}$ representa a taxa de variação temporal da densidade de energia mecânica das cargas, ou seja é o trabalho por unidade de tempo e por unidade de volume feito (pelo campo $\vec{E}$) sobre as cargas/correntes em movimento.

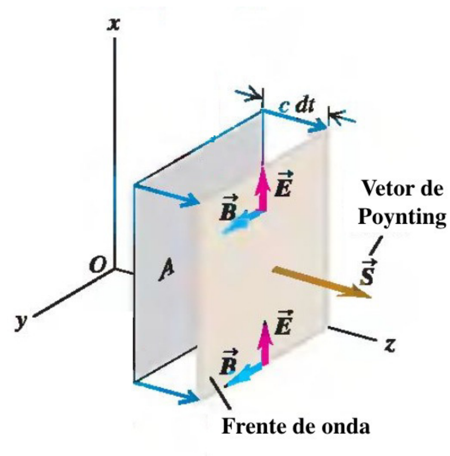

Figura 11.4: Vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B}/\mu_0$ aponta na direção de propagação, i.e. perpendicular a $\vec{E}$ e $\vec{B}$. (Young)

Assim, parte da energia eletromagnética é usada para acelerar cargas e correntes e é convertida em energia mecânica (cinética ou potencial) das cargas.

Já o termo $\nabla\cdot\vec{S}$ representa a fluxo de energia que o campo eletromagnético carrega como energia em si próprio para fora do sistema.

De fato, na ausência de correntes ($\vec{j} = 0$), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = 0 \tag{11.45}$$

i.e. toda a variação na densidade de energia eletromagnética do sistema se deve ao divergente de $\vec{S}$. Comparando esta equação com a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \tag{11.46}$$

temos:

$$\vec{j} = \rho\vec{v}: \quad \text{densidade de corrente de cargas (carga por tempo por área)} \tag{11.47}$$

$$\vec{S} = u\vec{c}: \quad \text{densidade de corrente de energia (energia por tempo por área)} \tag{11.48}$$

11.3.1 Intensidade

O vetor de Poynting $\vec{S}$, assim como os campos, pode estar oscilando no tempo. Definimos então a intensidade I da onda eletromagnética como o valor médio de S:

$$I = \langle S \rangle : \text{ Intensidade (energia média por tempo por área)} \tag{11.49}$$

11.3.2 Ondas Planas

No caso geral

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{11.50}$$

Para uma onda plana, $B = E/c$, portanto (usando $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$)

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \tag{11.51}$$

ou seja, $u_E = u_B$ e metade da energia está em cada campo. Temos então

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \tag{11.52}$$

Supondo, como anteriormente, $\vec{E} = E\hat{x}$, $\vec{B} = (E/c)\hat{y}$, temos (usando $1/\mu_0 = c^2\epsilon_0$)

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{z} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\hat{z} = (\epsilon_0 E^2)c\hat{z} = uc\hat{z} = u\vec{c} \tag{11.53}$$

E a intensidade I fica

$$I = \langle S \rangle = \langle uc \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle \tag{11.54}$$

Para um campo senoidal $E = E_0 \sin(kz - \omega t)$, temos $\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle$. Temos

$$\langle \sin^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\ \sin^2(kz - \omega t) = \frac{1}{2}\,, \tag{11.55}$$

onde $T = 2\pi/\omega$ (ver Apêndice O). Assim, obtemos

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 \tag{11.56}$$

11.4 Momento de Ondas Eletromagnéticas

Considere novamente a Força de Lorentz sobre uma carga q:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{11.57}$$

A força por unidade de volume f em uma região fica

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\Delta\text{vol}} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{11.58}$$

Usando a Lei de Ampere para eliminar $\vec{j}$, temos

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \left(\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times\vec{B} \tag{11.59}$$

Por outro lado, temos a identidade:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) &= \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ &= \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\end{aligned} \tag{11.60}$$

onde usamos a Lei de Faraday na segunda linha. Portanto

$$\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} = \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \epsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) \tag{11.61}$$

Portanto, a força por unidade de volume fica

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0}\times\vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \epsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) \tag{11.62}$$

Finalmente, usando $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$, e tambem $\rho = \epsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$ e o fato de que $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ pode ser inserido sem alterar a equação, temos

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \rho\vec{E} - \left(\frac{\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})}{\mu_0} + \epsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)\\ &= \left[\epsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + \frac{\vec{B}(\nabla\cdot\vec{B})}{\mu_0} - \left(\frac{\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})}{\mu_0} + \epsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\right)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{S}}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{11.63}$$

Agora note que força é a derivada temporal do momento. Pode-se mostrar que o termo entre colchetes pode ser escrito como um *divergente generalizado* e representa o momento por unidade de volume que sai do sistema de cargas/campos, similarmente ao que o vetor $\vec{S}$ fazia com a energia.

Vamos calcular por exemplo a componente z dos termos com $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}\Big[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} &- \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\Big]_z\\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)E_z - E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + E_y\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial(E_xE_z)}{\partial x} + \frac{\partial(E_yE_z)}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial(E_x^2+E_y^2-E_z^2)}{\partial z}\\ &= \nabla\cdot\left(E_xE_z\ ,\ E_yE_z\ ,\ \frac{-\left(E_x^2+E_y^2-E_z^2\right)}{2}\right)\\ &= -\nabla\cdot\left(-E_xE_z\ ,\ -E_yE_z\ ,\ \frac{\left(E^2-2E_z^2\right)}{2}\right)\end{aligned} \tag{11.64}$$

O mesmo se aplica aos termos com $\vec{B}$, portanto a componente z do colchete da Eq. 11.63 fica:

$$[...]_z = -\nabla\cdot\left(-\epsilon_0E_xE_z - \frac{1}{\mu_0}B_xB_z\ ,\ -\epsilon_0E_yE_z - \frac{1}{\mu_0}B_yB_z\ ,\ \frac{\epsilon_0\left(E^2-2E_z^2\right)}{2} + \frac{\left(B^2-2B_z^2\right)}{2\mu_0}\right) \tag{11.65}$$

Vamos consider o caso da onda com $\vec{E} = E\hat{x}$ (ou seja $E_y = E_z = 0$), e $\vec{B} = E/c\hat{y}$ (ou seja $B_x = B_z = 0$). Portanto o vetor de Pointing é $\vec{S} = \epsilon_0 E^2 c\hat{z} = \epsilon_0 E^2 \vec{c}$, e

$$\begin{aligned} [...]_z &= -\nabla \cdot \left(0 \ , \ 0 \ , \ \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) \\ &= -\nabla \cdot \left(0 \ , \ 0 \ , \ \epsilon_0 E^2\right) \\ &= -\nabla \cdot (\epsilon_0 E^2 \hat{z}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_0 E^2 c}{c^2} c\hat{z}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{S}{c^2}\vec{c}\right) \end{aligned} \tag{11.66}$$

Assim, a componente z da Eq. 11.63 fica:

$$f_z = -\nabla \cdot \left(\frac{S}{c^2}\vec{c}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{c^2}\right) . \tag{11.67}$$

O lado esquerdo desta equação representa a variação do momento das cargas na direção z:

$$f_z = \frac{\partial p_{\text{carga}}}{\partial t} \tag{11.68}$$

Portanto

$$\frac{\partial p_{\text{carga}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{c^2}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{S}{c^2}\vec{c}\right) \tag{11.69}$$

Assim, o segundo termo na Eq. 11.69 deve representar a força por unidade de volume dos próprios campos eletromagnéticos. Temos então vetorialmente:

$$\vec{f}_{EM} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{S}}{c^2}\right) = \frac{\partial \vec{p}_{EM}}{\partial t} \tag{11.70}$$

onde $\vec{p}_{EM}$ é o momento por unidade de volume dos campos eletromagnéticos. Portanto

$$\vec{p}_{EM} = \frac{\vec{S}}{c^2} . \tag{11.71}$$

Assim, a Eq. 11.69 fica finalmente

$$\frac{\partial(p_{\text{carga}} + p_{EM})}{\partial t} = -\nabla \cdot (p_{EM}\vec{c}) \tag{11.72}$$

Como $\vec{S} = (u_{EM} c)\ \hat{c}$, temos

$$\vec{p}_{EM} = \frac{u_{EM}}{c}\hat{c} \tag{11.73}$$

Multiplicando pelo volume que estamos considerando, as densidades de momento e energia passam a ser o momento P_{EM} e energia U_{EM} totais no volume, e temos:

$$\vec{P}_{EM} = \frac{U_{EM}}{c}\hat{c} \qquad \text{ou} \qquad U = Pc \ \text{ para campos EM} \tag{11.74}$$

Nota: No contexto de relatividade especial, a energia de uma partícula qualquer é dada por

$$U = \sqrt{(Pc)^2 + (mc^2)^2} \tag{11.75}$$

Quando a partícula está parada ($P = 0$), temos a fórmula de Einstein $U = mc^2$.
Quando a partícula não tem massa, caso dos fótons de luz, $U = Pc$, como acima para a radiação.

11.4.1 Pressão de Radiação

Suponha que a radiação eletromagnética seja *absorvida* por uma superfície de área A, e que esta absorção ocorra em um tempo Δt, no qual a onda percorre a distância $c\Delta t$ e transfere seu momento linear à superficie, exercendo sobre esta uma força e, portanto, uma pressão. A variação de momento da onda neste tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta P_{EM} &= \langle p_{EM}\rangle \Delta\text{vol} = \frac{\langle S\rangle}{c^2}(Ac\Delta t) \\ &= \frac{I}{c}A\Delta t \end{aligned} \tag{11.76}$$

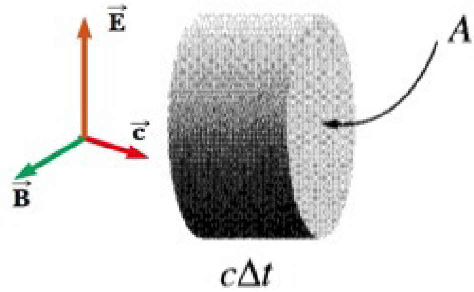

Figura 11.5: Onda eletromagnética é absorvida por uma superfície de área A em um tempo Δt, transferindo a esta seu momento linear e exercendo uma pressão de radiação. (Adaptado de Griffiths e Serway)

Portanto, a radiação exerce sobre a superfície uma força

$$F_{EM} = \frac{\Delta P_{EM}}{\Delta t} = \frac{I}{c}A \tag{11.77}$$

e uma pressão $P = F_{EM}/A$

$$P = \frac{I}{c} \qquad \text{Pressão de Radiação (absorção)} \tag{11.78}$$

Quando a onda é *refletida* pela superfície, ao invés de absorvida, a variação no momento da onda é 2 vezes o momento inicial, i.e. $\Delta P_{EM} = 2\langle p_{EM}\rangle\Delta\text{vol}$, e portanto

$$P = \frac{2I}{c} \qquad \text{Pressão de Radiação (reflexão)} \tag{11.79}$$

Existe uma maneira *eurística* de entender como a radiação faz uma força sobre a superfície. Considere uma carga positiva na superfície. O campo elétrico $\vec{E}$ fará com que esta carga tenda a se mover na direção de $\vec{E}$. Mas, assim que a carga tiver uma velocidade nesta direção, ela sofrerá uma força magnética devido a $\vec{B}$ na direção e sentido de $\vec{c}$, i.e. na direção de propagação da onda. No caso de cargas negativas, a carga se move no sentido oposto a $\vec{E}$, mas novamente a força magnética aponta no sentido de $\vec{c}$. Portanto, todas as cargas da superfície sofrem força na direção de propagação e, desta forma, a radiação "empurra" a superfície.