VII. Derivadas das funções trigonométricas

1. A medida em radianos de um ângulo

As derivadas das funções trigonométricas ficam mais simples quando o ângulo é medido em radianos[1]. A Figura 1 esquematiza a geometria da medida de um ângulo. O pontilhado representa uma circunferência de raio *r* com origem na interseção das duas retas que definem o ângulo θ. Essa interseção das retas foi designada por O na figura. O arco de circunferência delimitado pelas duas retas foi chamado de *s*. Define-se a medida do ângulo em radianos como

$$\theta = \frac{s}{r}$$

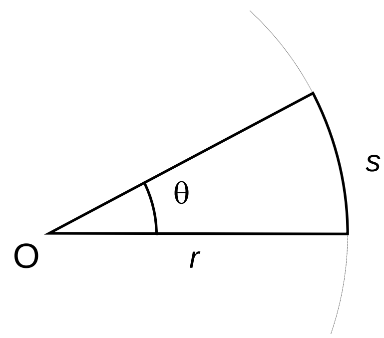

Figura 1. A linha tracejada é uma parte de uma circunferência de raio *r* centrada em O. O arco em linha cheia *s* é subtendido pelo ângulo θ.

Dessa maneira, uma volta inteira, que corresponde a 360º , vale, em radianos,

$$\text{volta inteira} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim, descobrimos que a medida de um ângulo em graus é transformada para radianos pela fórmula

$$\theta_{rad} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{graus}}{360^o}$$

A correspondência entre as medidas em graus e radianos dos ângulos mais usados estão na tabela 1.

Tabela 1. Na mesma coluna, estão as medidas em graus e radianos dos ângulos mais comuns.

graus	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
radianos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

[1] A grandeza ângulo não tem dimensão física, uma vez que é proporcional à razão entre o arco e o raio de uma circunferência com centro no vértice do ângulo, mas tem unidade. O sistema internacional de unidades adota o radiano, com 1 rad = 1 m/1 m. Como é muito comum medir-se os ângulos em graus, é preciso prestar muita atenção nas fórmulas que dependem da unidade de medida, como as deste texto.

2. Determinação da derivada de uma função trigonométrica

As derivadas das funções trigonométricas precisam de alguma explicação a mais. Antes de chegarmos às regras analíticas, faça um exercício com um exemplo numérico.

Questão 1. Procedendo como na tabela 2.1 da página 27 do livro do Resnick, determine a velocidade em t = 0,0 s da extremidade de um pêndulo de um relógio de parede, que se move de acordo com a equação horária

$$x(t) = 10\ \text{sen}(2\pi t),$$

onde x está em cm quando t está em segundo e o argumento do seno está em radianos (o fator 2π que multiplica t no argumento do seno seria diferente se o argumento fosse em graus – esta questão de radianos ou graus é muito importante quando falamos de funções trigonométricas).

O cálculo da derivada do seno pode ser realizado de maneira parecida com o efetuado para derivar as potências de x:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(x+\Delta x)-\text{sen}(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(x)\cos(\Delta x)+\text{sen}(\Delta x)\cos(x)-\text{sen}(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(x)(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x)\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \text{sen}(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}+\cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

A segunda linha da dedução acima foi obtida pela expansão do $\text{sen}(x+\Delta x)$. Para obter o resultado final, usamos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos(\Delta x)-1)}{\Delta x}=0\ .$$

A razão $\frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$ só tende a 1 quando o ângulo tende a zero se o ângulo for medido em radianos. As fórmulas que estamos apresentando, portanto, exigem que trabalhemos em radianos.

3. As derivadas e integrais do seno e cosseno

Quando o argumento do seno é multiplicado por uma constante, é preciso usar a regra de cadeia para completar a derivada. Os resultados obtidos nesse procedimento para o seno e o cosseno de um polinômio do 1º grau em *x* estão na Tabela 2.

Tabela 2. Derivadas do seno e do cosseno de um polinômio de 1º grau.

função	derivada	condição
$f(x) = \operatorname{sen}(ax + b)$	$\frac{df}{dx} = a\cos(ax + b)$	*ax* medido em radianos
$f(x) = \cos(ax + b)$	$\frac{df}{dx} = -a\operatorname{sen}(ax + b)$	*ax* medido em radianos

Como um exemplo direto de aplicação, a função

$$f(t) = 5t^4 + 2\cos(3\pi t)$$

tem como derivada a função

$$\frac{df}{dt} = 20t^3 - 6\pi\operatorname{sen}(3\pi t)$$

As integrais do seno e cosseno são encontradas buscando as funções cujas derivadas são essas funções. Uma tabela dessas integrais está na tabela 3 abaixo.

Tabela 3. Integrais do seno e do cosseno de um polinômio de 1º grau

função	Primitiva $F = \int f(x)\,dx$	condição
$f(x) = \operatorname{sen}(ax + b)$	$-\frac{\cos(ax + b)}{a} + C$	*ax* medido em radianos, C constante de integração
$f(x) = \cos(ax + b)$	$\frac{\operatorname{sen}(ax + b)}{a} + C$	*ax* medido em radianos, C constante de integração