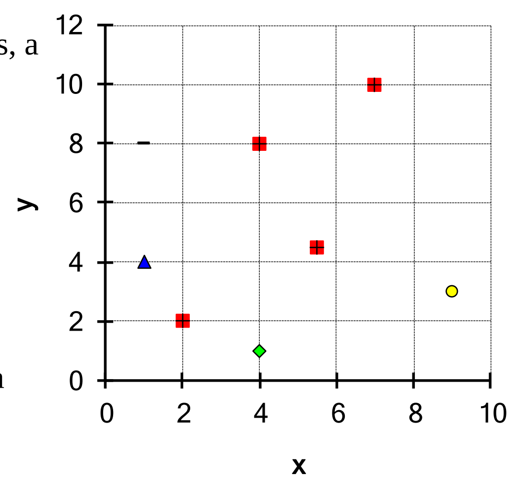
VI. Revisão de Vetores

1 Introdução

Muitas grandezas físicas são melhor representadas por vetores: força, velocidade e aceleração são os exemplos de agora, e muitas outras aparecerão ao longo do curso de Física. Os vetores são entidades matemáticas com muitas propriedades algébricas e serão um tema recorrente no curso.

Este assunto, que está no livro do Halliday, capítulo 2 da 5ª edição, encontra-se detalhado também nas seções VI.2 a VI.4 abaixo. Estes textos têm como requisito as ideias básicas de localização no plano e do significado de uma grandeza vetorial. Tente solucionar as questões r1 a r3 abaixo. Caso encontre facilidade em resolvê-las, pode seguir adiante. Caso encontre dificuldade, procure rever esse assunto no seu material do ensino médio. Uma boa explicação pode ser encontrada no livro **Física 1 - mecânica**, do GREF, Editora da USP, 1990 - leia o texto compreendido entre as páginas 185 a 196 desse livro. Depois de rever, retorne a estes exercícios e ao texto que segue.



r1) Usando o mapa ao lado, escreva, em coordenadas cartesianas, a posição do marcador em forma de:

a) losango;

b) triângulo e

c) círculo.

r2) Determine qual a forma do marcador que está na coordenada

a) (4 ; 8) e
b) (5,5 ; 4,5)

r3) Em cada uma das frases seguintes, grife a palavra que corresponde a uma grandeza e diga se ela é escalar ou vetorial.

a) Um menino puxa uma corda com uma força horizontal, para a direita.

b) A temperatura normal do corpo humano é 36,5 C.

c) A massa do pacote de arroz é 5 kg.

d) Um avião voa, com uma velocidade de 500 km/h, de leste para oeste.

2 Definição e representação

Neste texto, vamos nos limitar a lidar com os vetores que representam grandezas físicas no espaço de três dimensões, aonde o protótipo do vetor é o *deslocamento*. Muitas das propriedades que vamos apresentar abaixo se aplicam aos vetores em geral, mas outras são particulares dos vetores em três dimensões.

- Características gerais e a representação por flechas

Vetor é uma entidade matemática que, em três dimensões, possui módulo, direção e sentido definidos e pode, portanto, ser representada por um segmento de reta orientado, como esquematizado na Figura 1 abaixo. A direção da reta indica a direção do vetor e a ponta de seta define o sentido. É hábito imaginar uma pena na ponta oposta àquela em que se desenha a seta, o que permite dar nomes às extremidades do segmento – ponta de seta e ponta de pena. Para que uma grandeza física possa ser representada por um vetor, é preciso ainda que o resultado da soma de dois elementos independa da ordem em que é efetuada - a adição tem que ser comutativa.

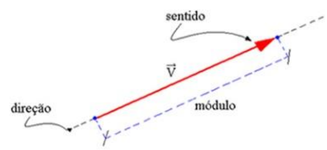


Figura 1. Representação de um vetor por uma flecha e a correspondência com a representação por módulo, direção e sentido. O sentido vai da ponta da pena (não desenhada) à ponta da seta

O módulo de um vetor é o escalar (o número com a unidade física adequada) que dá sua intensidade (também chamada magnitude) que, na representação por flechas, é proporcional ao seu tamanho. O símbolo universal para o módulo do vetor $\vec{A}$ é $|\vec{A}|$, ou seja, as duas barras verticais dizem que somente se considera a intensidade da grandeza. O módulo também é frequentemente representado pelo mesmo símbolo do vetor sem a flecha,

$$|\vec{A}| = A$$

Vetores *iguais* são aqueles que possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Dois vetores são *diferentes* quando pelo menos uma das características muda. O vetor que tem a sua ponta de seta coincidindo com a ponta de pena é o ***vetor nulo***, ou seja, o vetor nulo tem módulo igual a zero.

3 Operações básicas com vetores

Produto de um número real por um vetor

O produto de um número real *n* por um vetor $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} = n\ \vec{v}$, que tem as seguintes características:

- Módulo de $\vec{u}$: $|\vec{u}| = |n| . |\vec{v}|$
- Direção de $\vec{u}$: é a mesma de $\vec{v}$, desde que $n \neq 0$
- Sentido de $\vec{u}$: é o mesmo de $\vec{v}$, se $n > 0$, e oposto ao de $\vec{v}$, se $n < 0$

A figura abaixo exemplifica os vários resultados obtidos quando se multiplica um vetor $\vec{a}$ por números diferentes.

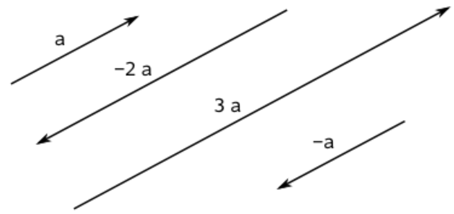


Figura 2. Representação do vetor $\vec{a}$ e dos três vetores obtidos pela sua multiplicação pelos números -2, -1 e 3.

Soma de vetores

Nessa representação por flechas, a adição vetorial pode ser feita por meio de dois processos: a regra do polígono e a regra do paralelogramo.

A **regra do polígono** deve ser aplicada da seguinte forma: transportam-se os vetores de modo que a ponta da seta de um coincida com a ponta da pena do outro, sem modificar seus módulos, direções e sentidos; a soma começa na ponta da pena do primeiro e termina na ponta de seta do segundo, veja o exemplo abaixo.

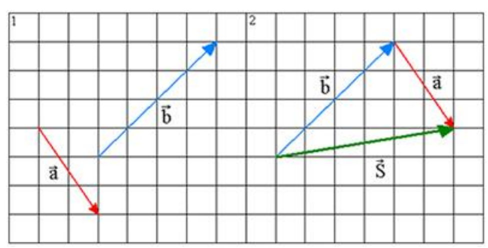


Figura 3. Soma vetorial $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ pela regra do polígono

A soma de mais de dois vetores deve ser feita posicionando os vetores consecutivamente, isto é, a ponta de seta do primeiro coincidindo com a ponta da pena do segundo, a ponta da seta do segundo coincidindo com a ponta da pena do terceiro, e assim sucessivamente; a soma começa na ponta da pena do primeiro e termina na ponta de seta do último, veja o exemplo na Figura 4.

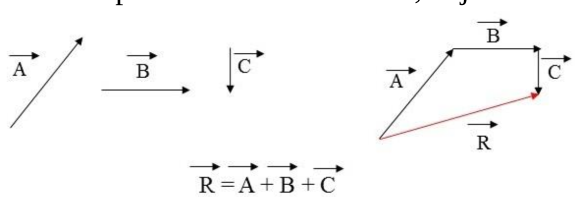


Figura 4. Soma vetorial pela regra do polígono

A **regra do paralelogramo** consiste em desenhar flechas paralelas a cada um dos dois vetores de modo a terem as pontas das penas no mesmo ponto; o vetor soma será representado por uma flecha com a pena no mesmo ponto das pontas de pena dos dois vetores e com a ponta de seta no cruzamento das duas retas paralelas aos vetores sendo somados, formando assim um paralelogramo, como ilustra a Figura 5 abaixo.

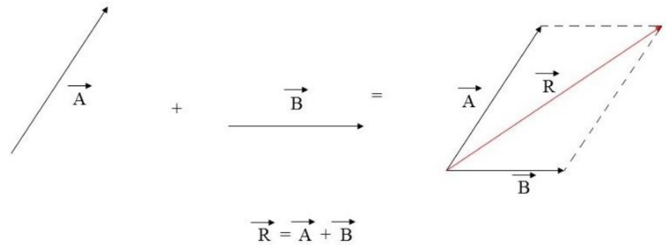


Figura 5. Soma vetorial pela regra do paralelogramo.

Vetores opostos

Dois vetores são *opostos* quando eles apresentam a mesma direção e o mesmo módulo, mas sentidos contrários, veja Figura 6. Assim, dois vetores opostos sempre são diferentes, mas nem sempre vetores diferentes serão opostos.

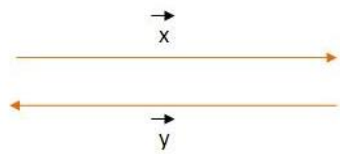


Figura 6. Os dois vetores representados são opostos.

Quando os vetores são opostos, como os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ da Figura 6, concluímos que sua soma resulta no vetor nulo:

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ com os vetores da Figura 6.

Questão 1. Considere dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ não nulos tais que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.

Calcule:

a) $2\vec{x} + \vec{y}$
b) $\vec{x} + 2\vec{y}$
c) $2\vec{x} - 2\vec{y}$
d) $-2\vec{x} - 2\vec{y}$

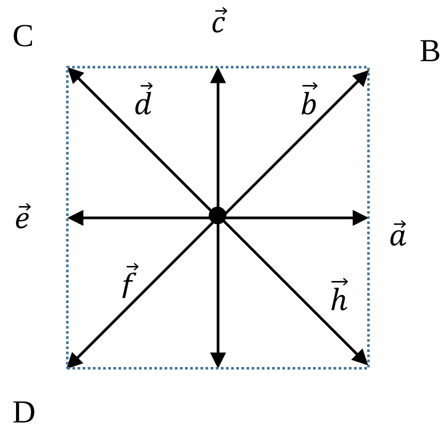


FIGURA 7. Ilustração dos vetores das questões 5 e 6. A figura representa 8 vetores nomeados em ordem alfabética a partir de $\vec{a}$, que têm suas pontas de pena no pequeno círculo ao centro. As pontas de seta dos 4 vetores que apontam nas diagonais ($\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{h}$) formam um quadrado ABCD (em linha pontilhada) e esses 4 vetores têm mesmo módulo. Os 4 vetores que apontam na vertical ou na horizontal ($\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$, $\vec{g}$) têm o mesmo módulo (diferente dos outros) e suas pontas de seta estão nos pontos médios do quadrado ABCD.

$\vec{g}$

Questão 2. Considere os vetores representados na FIGURA 7.

Determine as somas abaixo e apresente o resultado de modo que seja **apenas um** dos vetores representado na figura ou o vetor **nulo**:

a) $\vec{a} + \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{f}$
b) $\vec{b} + \vec{d}$; $\vec{b} + \vec{h}$

Diferença de vetores

A diferença dos vetores $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_1}$, nessa ordem,

$$\vec{d} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

é definida como a soma do primeiro com o oposto do segundo,

$$\vec{d} = \overrightarrow{v_2} + (-\overrightarrow{v_1})$$

Para representação e cálculo do módulo do vetor diferença ou subtração, deve ser aplicado o mesmo raciocínio da adição, trocando o sentido do vetor que será subtraído, para que possa ser trabalhado tal como uma soma vetorial – veja a Figura 8 abaixo.

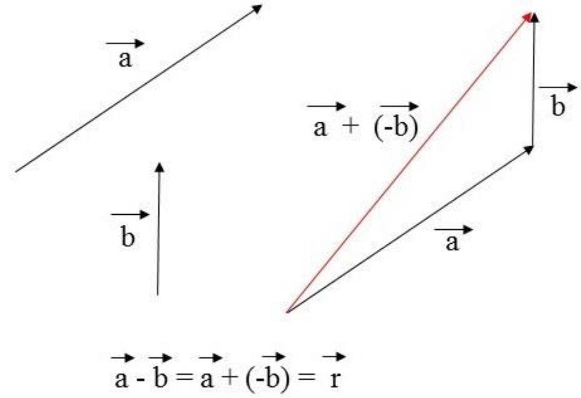


Figura 8. Ilustração da subtração de vetores.

Questão 3. Considere os vetores representados na FIGURA 7.

Determine as diferenças de vetores abaixo, de modo que o resultado seja apenas um dos vetores representados na figura, seus múltiplos ou o vetor nulo:

a) $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{e}$
b) $\vec{b} - \vec{c}$; $\vec{b} - \vec{h}$

A representação algébrica

O ***versor*** do vetor $\vec{A}$ é o vetor $\hat{a}$ que tem módulo 1 e aponta na direção e sentido de $\vec{A}$, portanto é definido por

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A} \quad \text{com} \quad A \neq 0$$

ou seja

$$\vec{A} = A \,.\, \hat{a}$$

Essa é maneira de construir um vetor quando se determina seu módulo separadamente da sua direção e sentido. Note que *A* tem dimensão física, enquanto que $\hat{a}$ é adimensional.

Questão 4. Determine os versores dos vetores abaixo.

a) $3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$
b) $3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$
c) $3\vec{\imath}$

Vetor unitário é todo vetor que tem módulo 1, adimensional; assim, os versores são vetores unitários. Em coordenadas cartesianas, podemos escolher três vetores unitários mutuamente perpendiculares para formarem uma *base* tal que qualquer vetor pode ser escrito em termos dessa base, somando múltiplos desses três vetores unitários. A escolha normalmente recai nos versores de vetores que apontam nas direções dos eixos coordenados, sempre no sentido positivo.

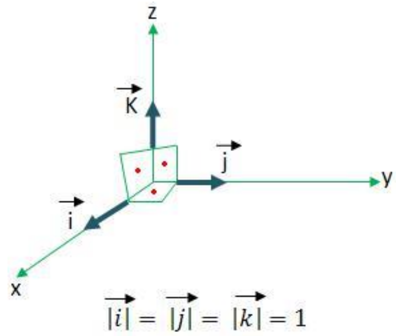


Figura 9. Representação dos vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, que formam uma base do espaço cartesiano que permite expressar qualquer vetor como uma soma ponderada deles.

Assim, qualquer vetor pode ser escrito como uma soma de três vetores

$$\vec{A} = A_1\hat{\imath} + A_2\hat{\jmath} + A_3\hat{k}$$

em que A_1, A_2 e A_3 são as projeções do vetor nos eixos coordenados. Nessa forma, o vetor é uma soma das suas 3 componentes $A_1\vec{\imath}$, $A_2\vec{\jmath}$ e $A_3\vec{k}$ nos eixos O*x*, O*y* e O*z*, respectivamente. Como os vetores unitários são sempre os mesmos, eles não precisam ser escritos em cada equação, o que dá origem a outra notação. No início dos cálculos, explica-se que os vetores são dados pelas projeções em 3 eixos, informa-se para que direção aponta cada um dos eixos e escreve-se simplesmente

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

Nessa representação algébrica, o módulo do vetor $\vec{A}$ pode ser calculado a partir da diagonal do retângulo definido pelas três projeções no eixo, portanto

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Vetor posição

Localizar uma partícula no espaço requer a definição de um ponto que sirva de origem ao sistema de referência. O deslocamento, a partir dessa origem, que marca a posição da partícula é o *vetor posição*. A Figura 10 abaixo representa um vetor posição $\vec{r}$, cuja forma analítica, em termos dos versores $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, é

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

ou seja, as projeções do vetor posição são as coordenadas da partícula. Seu módulo é a distância à origem,

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

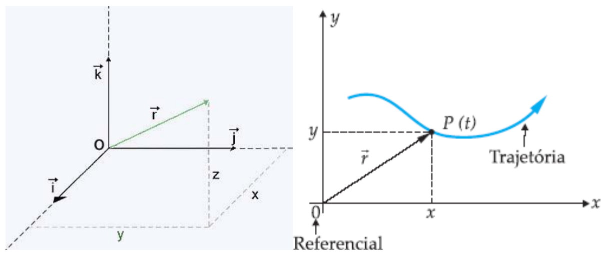
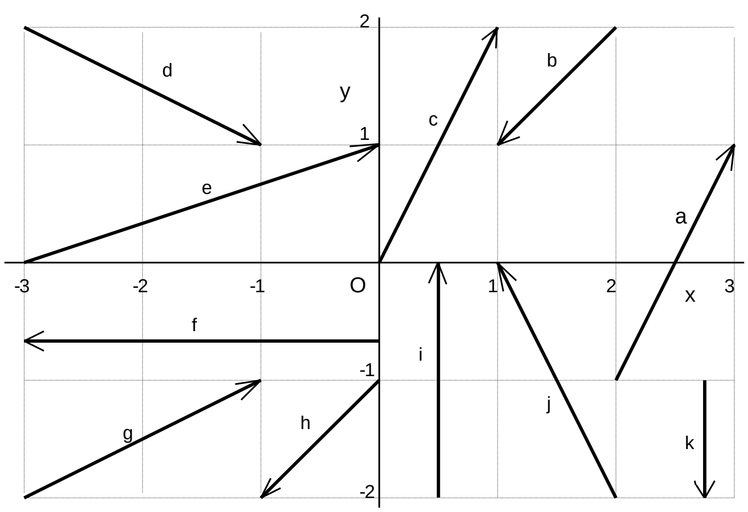


Figura 10. Representação do vetor posição $\vec{r}$ (esquerda) e exemplo de uso do vetor posição para descrever uma trajetória (direita).

Questão 5. Represente, em um mesmo plano cartesiano, os seguintes vetores:

$$\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$$
$$\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\vec{c} = 4\vec{i}$$
$$\vec{d} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

Questão 6. Escreva, usando coordenadas cartesianas, cada um dos vetores representados abaixo:



4 De módulo, direção e sentido para a representação algébrica e vice-versa

É sempre possível determinar a representação analítica de um vetor cujo módulo, direção e sentido são conhecidos. Aqui, discutiremos essa transformação em duas dimensões apenas. A figura abaixo representa um vetor em duas dimensões, cujo módulo é conhecido, A, e sua direção forma um ângulo θ com o eixo Ox.

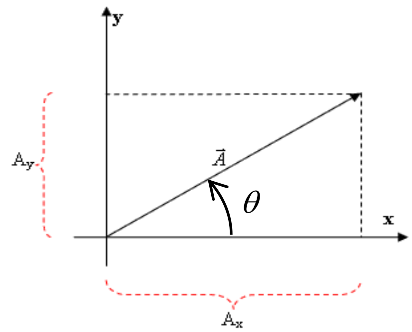


Figura 11. Decomposição do vetor a partir de sua intensidade, direção e sentido, para determinar sua representação analítica.

A projeção do vetor $\vec{A}$ no eixo Ox do plano cartesiano será dado por $A_x\hat{\imath}$, e sua projeção no eixo Oy do plano será $A_y\hat{\jmath}$. Na figura, vemos que

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{A_y}{A}$$

de modo que este vetor pode ser escrito como:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} = A\cos\theta\,\hat{\imath} + A\operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

Apesar da dedução dessa expressão ter sido baseada na Figura 11, que representa um vetor no primeiro quadrante, a fórmula acima vale para qualquer ângulo θ, desde que ele seja medido a partir do eixo Ox e crescente no sentido anti-horário, como indicado pela flecha no arco da Figura 11. Por exemplo, se o ângulo estiver no intervalo $90° < \theta < 180°$, a componente x aponta para a esquerda e a componente y, para cima, mas o cosseno desse ângulo é negativo e o seno, positivo, de modo que os sinais acompanham corretamente os sentidos das componentes do vetor.

Note que os casos: $\theta = 90°$ e $\theta = -90°$ são mais simples, uma vez que esses vetores apontam na direção Oy, portanto correspondem aos vetores $A\vec{\jmath}$ e $-A\vec{\jmath}$, respectivamente.

A operação inversa – da representação analítica para módulo, direção e sentido – pode ser deduzida usando a mesma Figura 11, entendendo que as grandezas conhecidas são A_x e A_y , das quais se precisa determinar o módulo A e a direção e o sentido, ou seja, o ângulo θ, que pode apontar para qualquer quadrante, quando varia de 0 a 360º.

Notando que A é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos A_x e A_y, deduz-se que o módulo de um vetor na representação analítica é

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

Também verificamos que

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

Essas expressões são sempre válidas e corretas, mas, infelizmente, a última delas não permite determinar o ângulo θ. A Figura 12 abaixo é o gráfico da função $\tan\theta$ e a Figura 13, da função arco tangente.

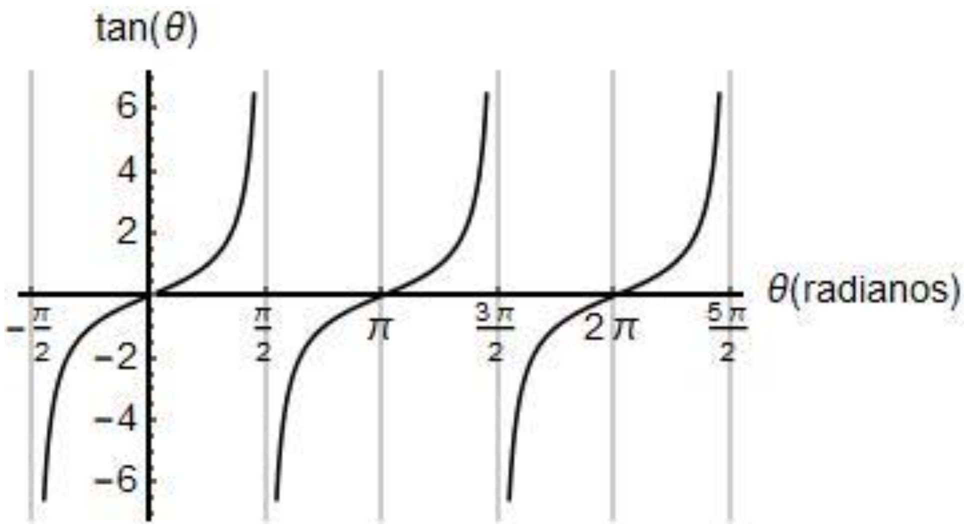


Figura 12. Gráfico da função tangente.

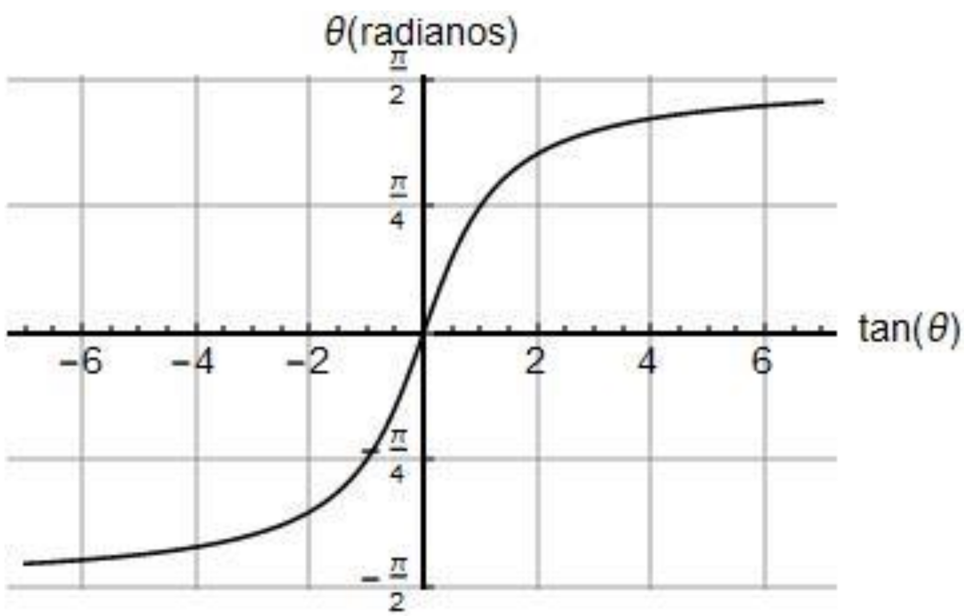


Figura 13. Gráfico da função arco tangente.

Note que a função arco tangente com que construímos a Figura 13 somente devolve ângulos no intervalo $-90° < \theta < 90°$, enquanto são necessários ângulos entre $0° < \theta < 360°$. O que acontece é que ***a função tangente não tem inversa***, uma vez que vários ângulos dão o mesmo valor da tangente, de modo que só é possível definir a função inversa quando se escolhe um ramo da função em que cada valor corresponda a um único valor de ângulo. Os programas de computador escolhem o ramo $-90° < \theta < 90°$. Note que essa faixa é adequada no caso do desenho da Figura 11 e qualquer outro caso em que o vetor aponte no sentido do 1º ou 4º quadrantes, e, quando o vetor aponte no sentido do 2º ou 3º quadrantes, basta usarmos

$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} + \pi$$

A regra de transformação **usando o ramo $-90° < \theta < 90°$ para definir a função $\arctan x$** é, portanto,

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{A_y}{A_x} & \text{se } A_x > 0 \text{ (o sentido aponta no 1° ou 4° quadrantes)} \\ \arctan\dfrac{A_y}{A_x} + \pi & \text{se } A_x < 0 \text{ (o sentido aponta no 2° ou 3° quadrantes)} \end{cases}$$

Questão 7. Determine a representação analítica dos vetores:

a) Módulo 10, direção 30º com o eixo Ox, sentido nordeste.
b) Módulo 10, direção 30º com o eixo Ox, sentido sudoeste.

Questão 8. Determine o módulo, direção e sentido dos vetores

a) $14\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$
b) $-14\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$
c) $14\hat{\imath} - 10\hat{\jmath}$
d) $-14\hat{\imath} - 10\hat{\jmath}$