IV. O gráfico de uma parábola

A função do segundo grau, cujo gráfico tem a forma de uma parábola, é bastante usada nesta parte introdutória do curso de mecânica. Ela permite a representação matemática da queda livre e do lançamento de projéteis. Neste texto, vamos explorar seu gráfico em detalhes.

Dois pontos bastam para definir uma reta e três, para uma parábola. No entanto, é mais interessante caracterizar uma parábola pelos seus pontos chaves e comportamentos limites, que é a estratégia adequada para lidar com curvas mais complexas. Vejamos como obter essas características para uma função do segundo grau, cuja fórmula genérica é:

$y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes.

A forma genérica desta função está nas figuras 1a e 1b. Os pontos x_1 e x_2 são as raízes da equação $y(x) = 0$ e correspondem aos pontos de cruzamento da parábola com o eixo Ox, sendo, portanto, obtidos com a solução dessa equação do segundo grau, que nos dá:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2c}{b + \sqrt{\Delta}}$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$

que é frequentemente chamado de **discriminante** da equação, uma vez que é seu valor que define quantas raízes reais a equação tem.

O ponto de mínimo ou de máximo da parábola, x_m, pode ser determinado com base na simetria da figura. Ele é o ponto que fica na posição central entre x_1 e x_2 , portanto basta tirar a média entre estes dois valores para obtê-lo:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Ele também pode ser obtido por derivação, que é um procedimento que pode ser aplicado a qualquer curva. Veja que, para qualquer função, nos pontos de mínimo ou de máximo, a tangente à curva desenhada no plano cartesiano é horizontal (inclinação nula) e, portanto, a derivada nesse ponto é nula. Basta, portanto, determinar os pontos em que a derivada de uma função se anula para conhecer seus pontos de máximo ou mínimo. No caso da parábola, a função derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

que, igualada a zero, fica:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_m} = 0 = 2ax_m + b \qquad \Rightarrow \qquad x_m = -\frac{b}{2a}$$

As figuras 1a e 1b permitem analisar o comportamento da derivada de uma parábola tanto no caso de a ser positivo quanto negativo. Veja que, com $a > 0$, a derivada tem sinal negativo quando $x < x_m$ e positivo quando $x > x_m$. Isso significa que a parábola é decrescente no primeiro trecho e crescente no segundo, caracterizando um ponto de mínimo. Se $a < 0$, a situação é inversa. Portanto, o vértice da parábola é um ponto de mínimo quando $a > 0$ e sua abertura é voltada para cima, enquanto que, para $a < 0$, o vértice é um ponto de máximo e a abertura é voltada para baixo.

Com relação às raízes da equação do segundo grau, note que Δ pode ser menor, igual ou maior que zero. Como x_1 e x_2 dependem da raiz quadrada de Δ, caso ele seja negativo, as raízes serão ambas imaginárias. Não ter raízes reais significa que a parábola não intercepta o eixo Ox em nenhum ponto, portanto seu gráfico se localiza totalmente acima ou totalmente abaixo deste eixo. No caso em que $\Delta = 0$, tem-se que $x_1 = x_2$, significando que a parábola tangencia o eixo Ox, ou seja, o gráfico toca o eixo em apenas um ponto. Os gráficos da figura correspondem às curvas que se obtêm com os valores possíveis de a e Δ.

Quando se conhecem as raízes x_1 e x_2 , pode-se escrever a equação da parábola na forma

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Note que essa forma também exige três números para definir a parábola: a, x_1 e x_2, no lugar de a, b e c da forma canônica do início deste texto.

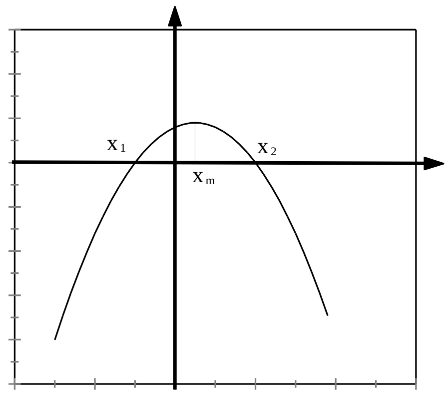
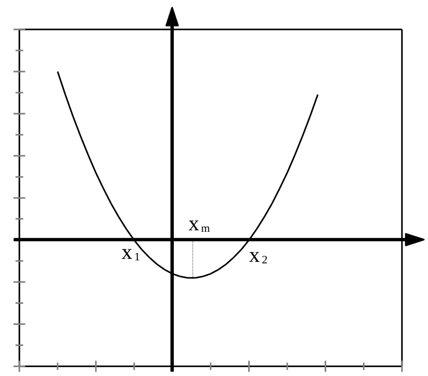
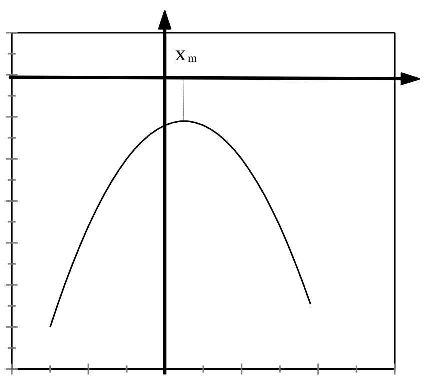
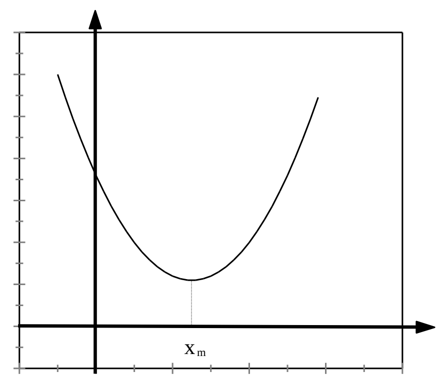
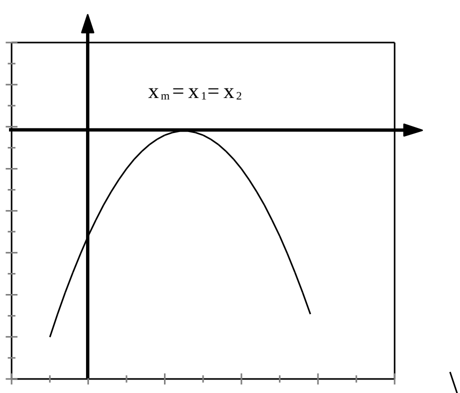
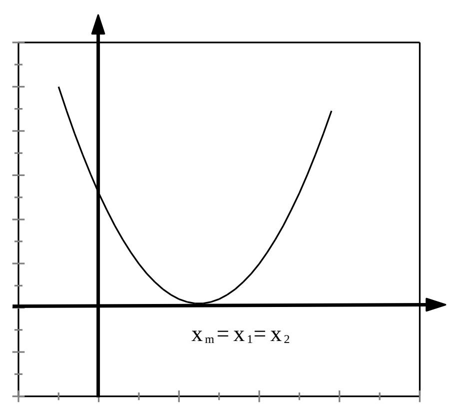
	$a < 0$	$a > 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		

Figura 1. Esboço de uma parábola, de acordo com o sinal do coeficiente do termo parabólico, a, e do discriminante Δ da equação $y(x) = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2. O ponto em que as setas que representam os eixos Ox e Oy se cruzam é a origem do sistema de referência, de coordenadas (0,0), e x_m representa a abscissa do mínimo de $y(x)$.