I. O gráfico de uma reta e a interpretação dos coeficientes

1. Introdução

No estudo de um fenômeno físico, é comum realizar ou imaginar experiências em que se medem diversas grandezas ao mesmo tempo. A relação entre essas grandezas pode ser expressa por meio de fórmulas matemáticas, tabelas ou gráficos. Neste texto, revisamos algumas ideias básicas necessárias à construção e interpretação de gráficos de retas em um plano.

Nesses gráficos, os pontos são localizados por um sistema de eixos, normalmente ortogonais. Para cada eixo adota-se uma ***escala***, sendo que a escala de um dos eixos é quase sempre diferente da escala do outro. Na construção de um gráfico, a primeira tarefa importante é **escolher escalas convenientes** (na seção 5 abaixo, discutiremos em detalhes o que é um fator de escala)**,** que evitem que parte do desenho fique fora do papel ou, pelo contrário, deixem o gráfico tão pequeno que seja impossível observar seus detalhes. Os eixos devem ser marcados com valores que permitam a fácil localização e marcação de pontos, bem como a leitura de valores a partir do desenho. O procedimento que permite escolher bem a escala é:

i. determine o tamanho do espaço disponível para o gráfico (tela do computador ou papel).
ii. identifique os valores máximos e mínimos das grandezas que serão representadas nos eixos.
iii. a partir desse tamanho e valores, calcule as escalas que permitam ocupar o espaço disponível.
iv. marque divisões nos eixos que sejam fatores do número 10 multiplicado por uma potência de 10: 0,1; 1; 10; ...; 0,2; 2; 20; ...; 0,5; 5; 50; ou até mesmo ...; 0,25; 2,5; 25; ..., mas nunca múltiplos de 3, 7 e 9, mesmo que isso signifique perder um pouco do espaço disponível.

Questão 1. Construa tabelas com pares de valores *x* e *y* para os gráficos a) e b) da fig. 1 abaixo. **Determine**, comparando essas tabelas, se os gráficos representam a mesma função ou funções diferentes.

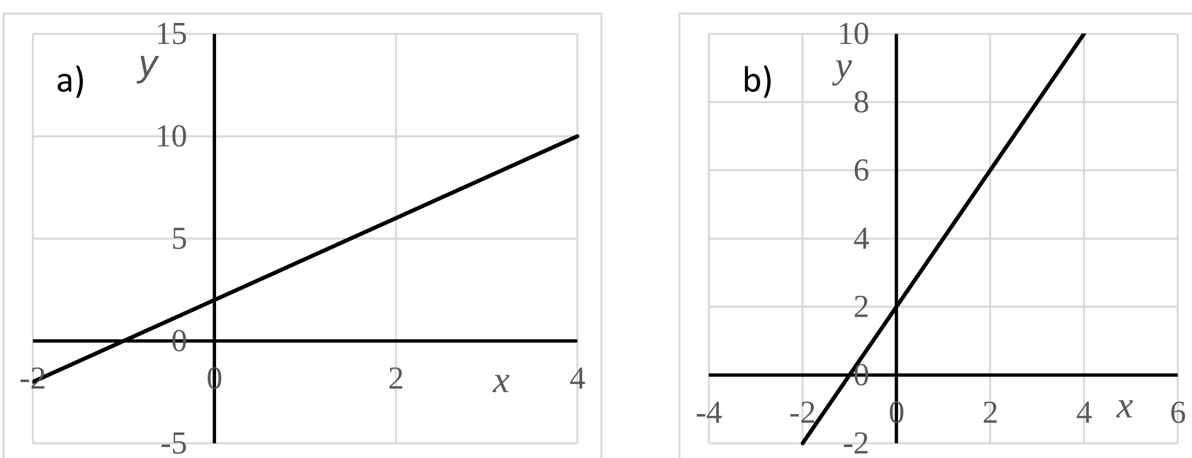


Figura 1. Gráficos a) e b) relativos à questão 1.

A fim de construir o gráfico de uma função, organizamos uma tabela com valores convenientes da abscissa *x* e os correspondentes valores da ordenada *y*. A seguir, localizamos cada par (*x*,*y*) no plano.

O gráfico da função é obtido ligando-se esses pontos; quando eles não estão alinhados numa reta, ligam-se os pontos sucessivos com curvas que acompanhem o comportamento indicado pelos pontos vizinhos.

2. Uma forma analítica para descrever uma reta

Uma reta pode ser descrita pela função de primeiro grau (primeiro grau porque a variável *x* aparece elevada à potência 1):

$$y = a\,x + b \tag{1}$$

em que *a* e *b* são constantes reais, que têm os nomes de coeficiente angular e coeficiente linear (ou termo constante), respectivamente.

Questão 2. Considere as funções:

(i) $y = 2x + 2$ (ii) $y = 3x + 2$ (iii) $y = 2x - 1$ (iv) $y = -2x + 2$

a) No quadriculado abaixo (fig. 2), faça os gráficos das funções (i-iv) acima, para *x* variando de -6 até $+6$. Escolha a mesma escala para as abscissas de todos os gráficos; faça o mesmo para a escala das ordenadas. Escolha com cuidado a escala no eixo *y* de forma a ter a melhor ocupação do espaço, mas de modo que todos os gráficos caibam no papel, no intervalo indicado. Use uma cor diferente para cada gráfico.
b) Para cada função (i-iv), determine os valores do termo constante e do coeficiente angular.
c) Determine o que há em comum entre a reta do item (i) e a reta do item (ii).
d) Determine o que há em comum entre a reta do item (i) e a reta do item (iii).
e) Encontre uma característica que distingue a reta do item (iv) das demais.

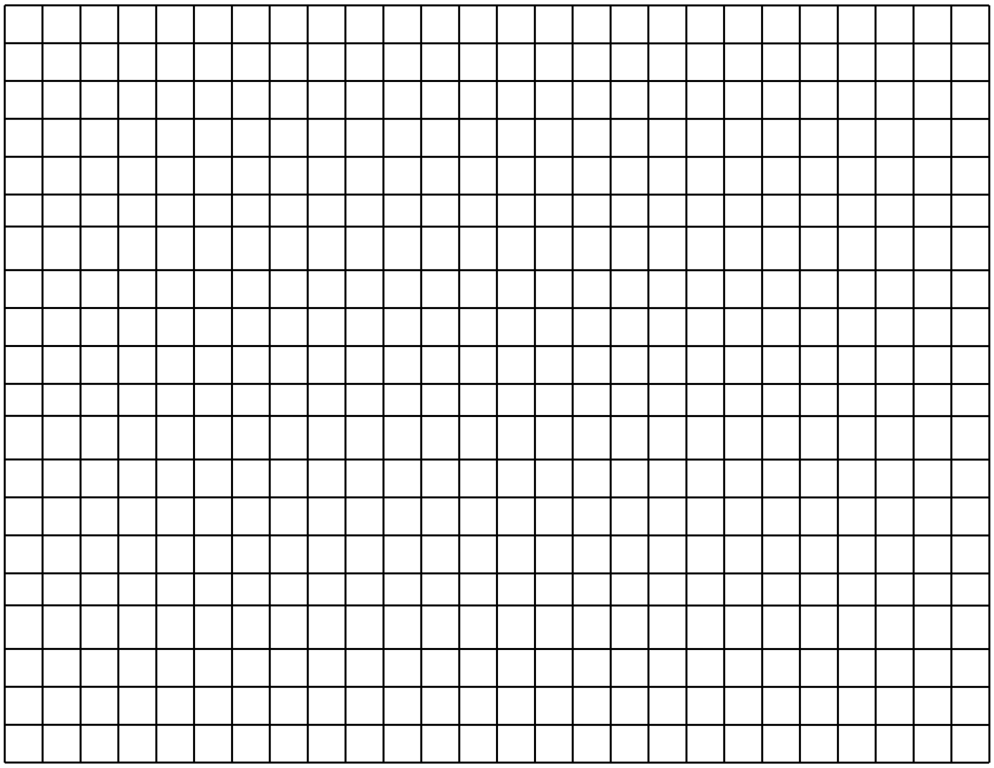


Figura 2. Quadriculado para a solução da Questão 2.

3. Interpretação de *a* e *b* da reta *y* = *a x* + *b* , quando *x* e *y* têm mesma dimensão física.

Na equação (1), o **coeficiente angular *a*** está associado à **inclinação da reta em relação ao eixo *Ox***. No caso (i) da questão 2, o coeficiente angular é igual a 2; no caso (ii), é igual a 3. Note que a reta descrita pela função do item (ii) é “mais inclinada” que a do item (i). Se ***a*** for negativo ($\boldsymbol{a} < 0$), como no item (iv), a grandeza *y* decresce à medida que *x* cresce.

A fim de relacionar o coeficiente angular com o ângulo entre a reta e o eixo *Ox*, considere o triângulo retângulo da fig. 3 abaixo. Os dois lados que formam o ângulo reto são chamados catetos; o lado *q* é o cateto oposto ao ângulo α e o lado *r* é o cateto adjacente ao ângulo α. Nesse triângulo retângulo, a tangente de α (tan α) é a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{q}{r} \qquad (2)$$

Assim, a constante ***a*** é, em módulo, igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*.

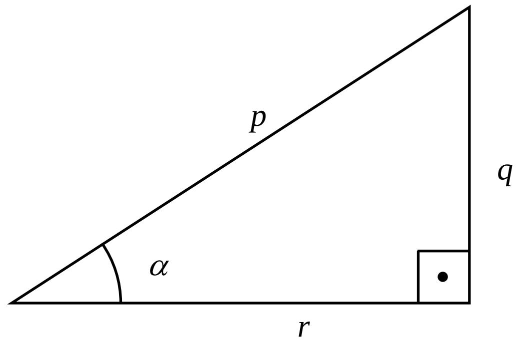


Figura 3. Desenho de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede p e os catetos medem q e r, e α é o ângulo compreendido entre o cateto r e a hipotenusa.

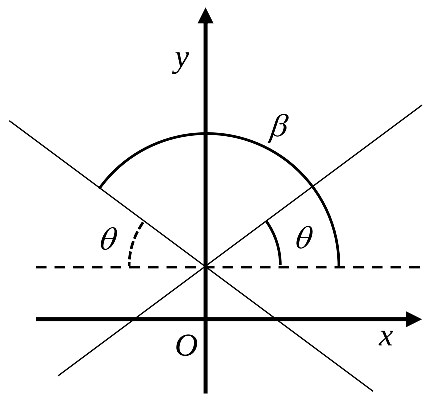


Figura 4. Gráficos de duas retas com coeficientes angulares opostos. Se o coeficiente angular da reta que forma ângulo θ com o eixo *Ox* é ***m***, então ***m*** > 0 e a reta que forma ângulo $\beta = 180^\circ - \theta > 90^\circ$ com O*x* tem coeficiente angular –***m***.

Podemos definir as funções trigonométricas, como seno, cosseno e tangente, para qualquer ângulo. A tangente de um ângulo $90^\circ < \theta < 180^\circ$ tem sinal negativo e módulo igual à tan (180º - θ). Com esta definição, o coeficiente ***a*** pode ser interpretado como a tangente do ângulo que a reta ***y* = *a x* + *b*** faz com o eixo *x*. Se ***a*** for negativo, o ângulo que a reta forma com o eixo *x* é obtuso e *y* diminui se *x* aumenta. A fig. 4 acima mostra duas retas com coeficientes angulares de mesmo módulo e sinais contrários; **nessa figura**, chamando de ***m*** o coeficiente angular da reta que forma ângulo θ com o eixo *Ox*, temos ***m*** > 0 e a reta que forma ângulo $\beta = 180^\circ - \theta > 90^\circ$ tem coeficiente angular –***m***, portanto negativo.

O número real ***b*** corresponde ao valor de *y* quando *x* = 0, ou seja, indica em que ponto a reta corta o eixo *y*. Note que as retas descritas pelas funções dos itens (i) e (iii) da Questão 2 cruzam o eixo *Oy* em $y = 2$ e $y = -1$, respectivamente. Como o coeficiente angular das duas retas é o mesmo (***a*** = 2), elas têm a mesma inclinação, ou seja, **são paralelas.**

4. Interpretação de *a* e *b* da reta *y* = *ax* + *b*, quando *x* e *y* não têm mesma dimensão física

Em física, as grandezas envolvidas nas equações têm dimensão na maior parte dos casos, isto é, são expressas em relação a uma unidade de medida. Isso faz com que a inclinação do gráfico que descreve os valores dessas grandezas tenha uma unidade e, na maior parte dos casos, não possa ser interpretada simplesmente como a tangente de um ângulo, necessariamente adimensional.

Entretanto, sempre podemos definir a inclinação da reta a partir de um par qualquer de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), pela expressão

$$\text{inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \qquad (3)$$

Assim, o coeficiente ***a*** é uma grandeza **com** dimensão física sempre que as grandezas *x* e *y* **não** tiverem a mesma dimensão física. Por exemplo, se *y* mede posição em m e *x* mede tempo em s, a inclinação tem a dimensão de m/s.

É importante, ainda, ter atenção para o fato de que, apesar da reta que representa o gráfico *y*(*x*) formar um ângulo com o eixo *Ox* que pode ser medido, por exemplo, com um transferidor, não podemos dizer que o coeficiente ***a*** seja a tangente desse ângulo. *Isso ocorre porque esse ângulo depende da maneira como você escolhe as escalas*. Por isso, deve-se calcular ***a*** usando a expressão (3).

Em relação ao coeficiente ***b***, a interpretação é a mesma da situação anterior (seção 3, *x* e *y* com mesma dimensão), exceto pelo fato dele possuir também uma dimensão física na maior parte dos casos.

5. Inclinação vs. tangente e fatores de escala

As seções 3 e 4 acima permitem concluir que **somente quando os eixos Ox e Oy estão na mesma escala** a inclinação é a tangente do ângulo. Agora, vamos entender porque essa inclinação também tem o nome *coeficiente angular*. Veremos ao final que é possível nos aproximarmos da interpretação simples do caso em que *x* e *y* estão na mesma escala, em que a tangente do ângulo é a inclinação da reta.

Considere o gráfico de posição por tempo de um ônibus que se desloca numa avenida congestionada entre x_i = 5 m no instante t_i = 3 s e x_f = 95 m no instante t_f = 48 s, com velocidade constante. Note que falamos até agora em gráfico de *y* por *x* (*x* costuma ser o eixo horizontal quando usamos esses dois nomes) e vamos fazer um gráfico *x* vs *t*, onde o *x* vai ser o eixo vertical. Exatamente para que o nome do eixo não importe, temos que adaptar todas as expressões aritméticas para os novos nomes. Assim, a inclinação, que era a razão entre Δy e Δx, eq. (3), agora será a razão entre Δx e Δt.

Para desenhar o gráfico num quadriculado de 10 cm por 10 cm, escolhemos uma escala em *x* tal que 100 m são representados em 10 cm, e uma escala de tempo em que 50 s são representados em 10 cm.[1] Se c_x é o comprimento do segmento desenhado para representar um intervalo Δx, então

[1] Não deixe de fazer o desenho em um papel quadriculado e certificar-se que vê no ***seu*** desenho o que está sendo explicado nesta seção 5, a não ser que tenha muita facilidade com o raciocínio abstrato.

$c_x = f_x \, \Delta x$, em que f_x é o fator de escala, e o mesmo raciocínio vale para a escala usada no eixo do tempo. Os fatores de escala definidos são, portanto, $f_x = \frac{10 \text{ cm}}{100 \text{ m}} = 0{,}1 \frac{\text{cm}}{\text{m}}$ e $f_t = \frac{10 \text{ cm}}{50 \ s} = 0{,}2 \frac{\text{cm}}{s}$ (nem tudo que tem dimensão de velocidade é uma velocidade, f_t não representa velocidade). Ao calcular a inclinação da reta no intervalo [3 s, 48 s], encontra-se

$$v = \frac{(95 - 5) \text{ m}}{(48 - 3) \text{ s}} = \frac{90 \text{ m}}{45 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se medirmos a tangente do ângulo no desenho encontramos, porém,

$$\tan(\theta) = \frac{9 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = 1$$

– note que o ângulo é mesmo 45º, que é o arco cuja tangente vale 1, portanto esta última conta está certa. A diferença das respostas vem das escalas, que não poderiam ser iguais, uma vez que as dimensões físicas envolvidas nos dois eixos são diferentes. Assim, quando calculamos a tangente trigonométrica, usamos segmentos, portanto

$$\tan \theta = \frac{c_x}{c_t} = \frac{\Delta x \ f_x}{\Delta t \ f_t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \frac{f_x}{f_t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \frac{0{,}1 \ \frac{\text{cm}}{\text{m}}}{0{,}2 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}}} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) 0{,}5 \ \frac{\text{s}}{\text{m}}$$

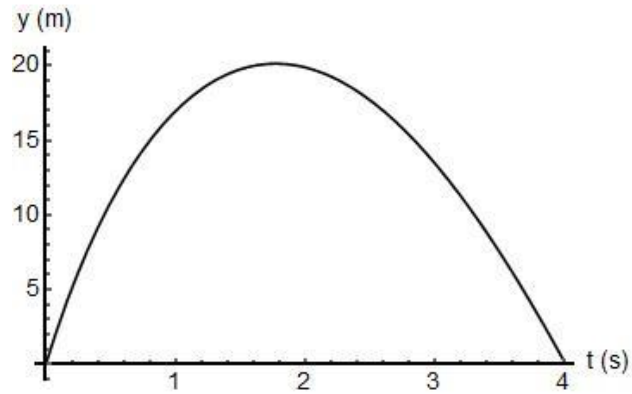
ou seja, a tangente do ângulo está relacionada com a inclinação por um fator que só depende das escalas usadas. Neste exemplo, o valor numérico da tangente do ângulo é metade do valor numérico da velocidade do ônibus expressa em m/s, mas cuidado – ***tirar a unidade*** m/s ***dessa frase tira todo seu sentido, de modo que a expressão "numericamente igual" quase nunca tem significado preciso.***

Enfim, a inclinação da reta está relacionada com a tangente do ângulo, bastando incluir a razão dos fatores de escala e não nos confundirmos com as unidades. Na prática, nunca medimos o ângulo de inclinação da reta com transferidores, mas sim calculamos a inclinação com a razão Δ*x*/Δ*t*, inclusive porque sempre precisamos desse valor com as unidades correspondentes, que não podem estar embutidas na tangente trigonométrica.

Questão 3. Considere um ônibus numa rodovia em movimento uniforme, cuja equação horária é $x = 20 + 80t$, em km para *t* em h.

Construa o gráfico dessa equação horária no intervalo de tempo entre 0 h e 0,5 h usando 1 cm/ 10 km para a escala de posições e 20 cm/h, para a dos tempos.

Questão 4. Considere o gráfico abaixo, correspondente à posição vertical de uma bola de futebol em função do tempo, no ar.



Determine as escalas usadas na construção do gráfico.

6. Variação Proporcional vs. Proporção. Tempos negativos

Estamos muito habituados a "fazer regra de três" em situações do cotidiano. Calculamos muito rapidamente que, se a dúzia de bananas custa R$5,00, uma dúzia e meia custará R$7,50. Dizemos que o preço da penca é *proporcional* ao número de bananas. Existem muitas outras situações onde há proporcionalidade entre grandezas, por exemplo, um mol contém 6×10^{23} moléculas.

Questão 5. Chamando de M o número de moles e de N o número de moléculas, escreva uma relação matemática entre o número de moles e moléculas de uma substância pura.

Uma grandeza física que é uma proporção entre duas outras grandezas é a densidade dos corpos homogêneos – a densidade é a razão entre a massa e o volume do corpo. Dizer que o corpo é homogêneo significa dizer que as propriedades de qualquer fragmento são as mesmas do corpo todo.

Para fixar ideias nesta discussão, imagine uma usina que produza artefatos de Alumínio (Al), que é um metal de densidade igual a 2,7 g/cm^3 = $2{,}7\times10^3$ kg/m^3. A fábrica produz, a partir de um grande corpo de Al que consideraremos puro nesta discussão, perfis, panelas e papel de Alumínio. Dizer que um objeto de Al é homogêneo significa, entre outras propriedades, que a proporção entre massa e volume é a mesma para qualquer pedaço desse objeto. Assim, tanto para um fragmento de papel de Al quanto para um caco da panela ou um fragmento de um trilho de cortina, a razão entre sua massa m e volume V é $\rho = 2{,}7\times10^3$ kg/m^3. Podemos, portanto, sempre deduzir o volume de um objeto de Al como $V = m/\rho$. Quando o objeto tem volume conhecido, podemos deduzir sua massa como $m = \rho V$. O gráfico da fig. 5 representa essa propriedade do Al metálico puro nas condições ambientes normais. Note a propriedade, absolutamente importante, do gráfico da massa de Al em função do volume passar pela origem do sistema de coordenadas, que é o ponto (0,0).

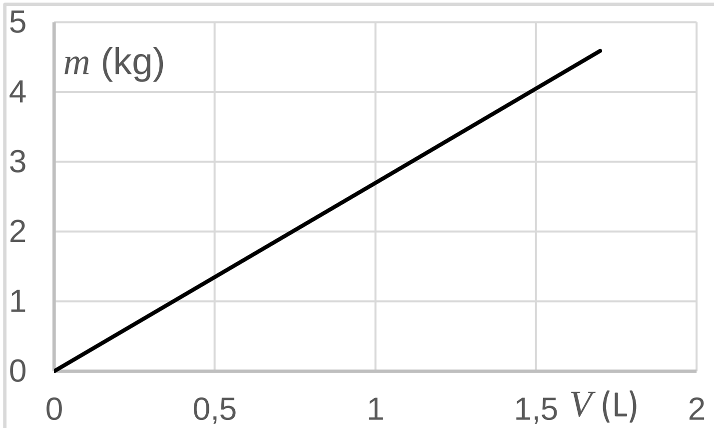


Figura 5. A linha contínua dá, no eixo das ordenadas, a massa de uma peça de Al cujo volume é *V*.

Tendemos a pensar que a velocidade de um objeto representa uma proporção. Afinal, dizer que um ônibus está trafegando à velocidade v = 10 m/s significa que ele se desloca 10 m em 1 s, o que está absolutamente certo. No entanto, a velocidade **não** é uma proporção entre a **posição** e o **tempo**. Veja, nos gráficos da fig. 6 abaixo, diferentes possíveis gráficos da posição em função do tempo de um ônibus com velocidade v = 10 m/s.

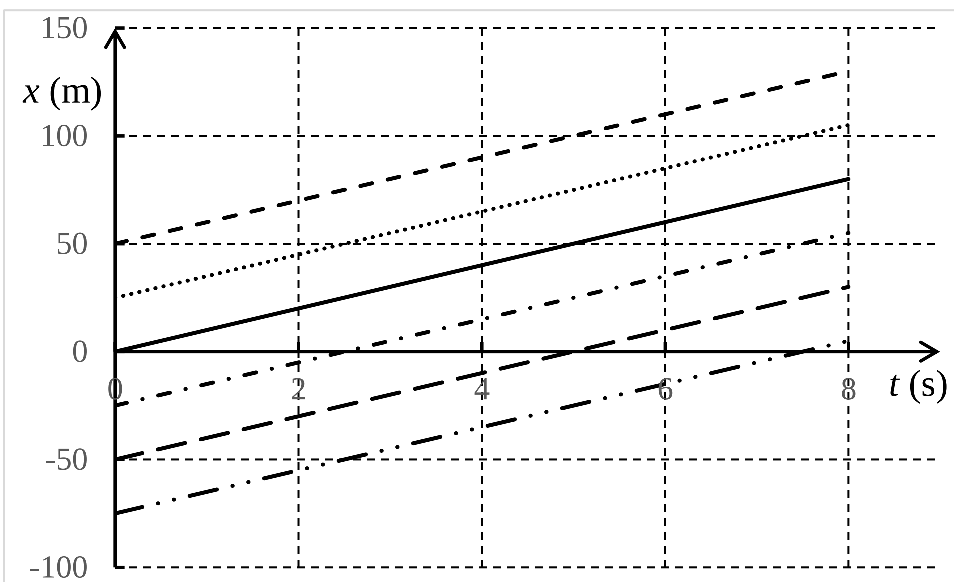


Figura 6. Diversos gráficos representando o movimento de um ônibus movendo a 10 m/s no mesmo sentido em que o eixo está orientado. Dessas retas, a única que representa uma proporção é aquela em linha contínua.

Caso você, equivocadamente, imaginasse a velocidade como uma proporção entre posição e tempo, deduziria que a posição do ônibus em t = 6,0 s é x = 60 m. Vemos no gráfico acima que, exceto na situação descrita pela linha contínua, sua posição em t = 6,0 s NÃO é x = 60 m.

É muito importante entender que a velocidade **não** é uma proporção entre posição e tempo, mas a proporção entre a variação da posição e o intervalo de tempo; dizemos que é uma *variação proporcional*. Ela representa o *deslocamento* num *intervalo* de tempo. Desse modo, a velocidade é a proporção entre **variação** de posição e "variação" de tempo. Quando um objeto se desloca com velocidade constante, sua **variação** de posição é **proporcional** ao intervalo de tempo considerado, portanto, é uma **variação proporcional**; ou simplesmente proporção das variações.

Questão 6: Qual a propriedade da curva em linha cheia da fig. 6 acima que faz com que a velocidade possa ser confundida com uma proporção simples?

Nas situações mais simples em que há apenas um objeto em movimento uniforme, você pode escolher a origem do sistema de coordenadas de maneira que em t = 0 s ele esteja na origem. No entanto, isso não pode ser feito em geral, de maneira que NUNCA devemos pensar na velocidade como uma proporção entre posição e tempo, mesmo que isso dê certo em alguma situação particular.

Uma variação proporcional pode, com frequência, ser expressa por números negativos, o que raramente faz sentido com proporções. A fig. 7 abaixo mostra alguns dos gráficos que representam o movimento de um objeto à velocidade de –5 m/s. A diferença entre as duas figuras (a) e (b) deve-se apenas ao intervalo de tempo considerado em cada um dos movimentos.

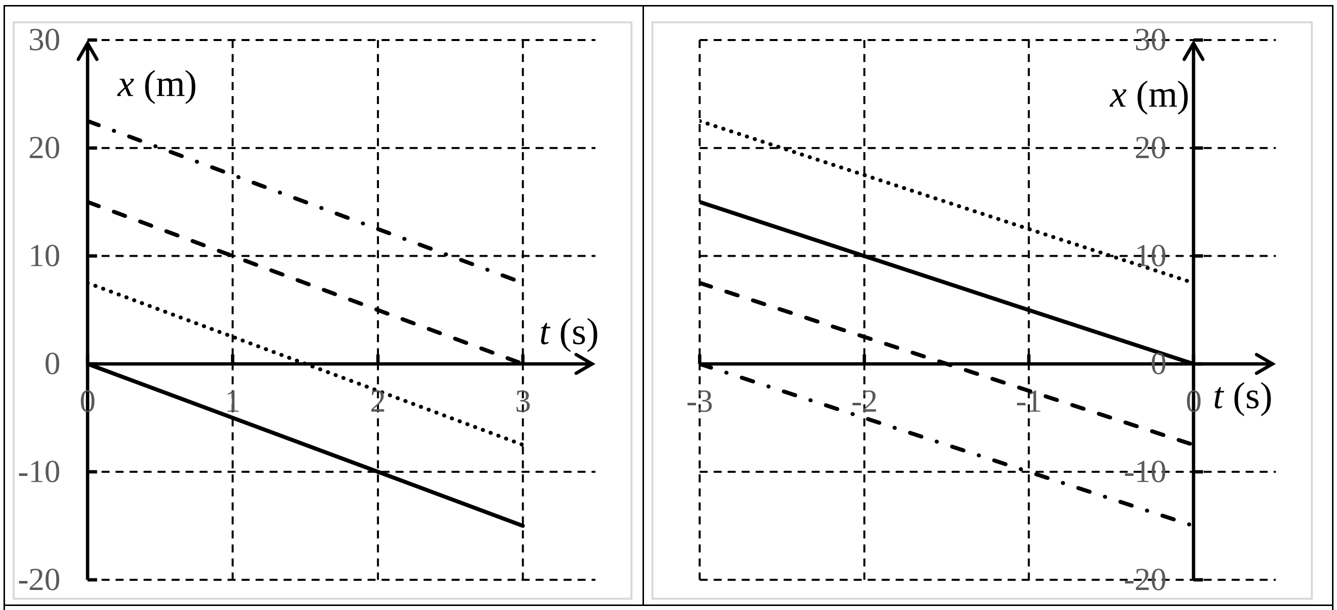


Figura 7. Diversos gráficos representando o movimento de um carro movendo a 5 m/s no sentido oposto ao que o eixo está orientado. Dessas retas, as que representam uma proporção estão em linha contínua.

Questão 7. Invente uma situação física de Movimento Uniforme em que você defina tempos negativos. Veja que basta escolher uma origem para a coordenada tempo que seja posterior ao instante em que você começa a descrever a situação.