IV. Fatoração Algébrica

A. Motivação

1. Enunciado do problema

Considere uma colisão elástica unidimensional entre dois objetos A e B, de massas conhecidas. Até o instante da colisão, B está parado e A tem velocidade v_A, também conhecida. A questão de interesse aqui é determinar como a velocidade de B imediatamente após a colisão, u_B, depende das massas de A e B, respectivamente m_A e m_B. A figura 1 esquematiza a situação.

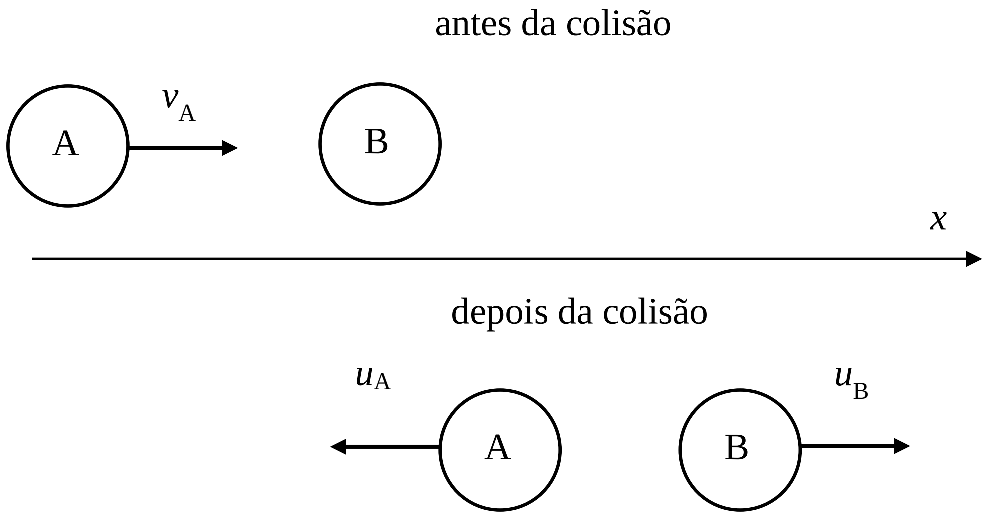

Figura 1. Esboço da colisão entre dois corpos em uma dimensão. As flechas indicam os sentidos das velocidades, mas u_A pode ser orientada para a direita, dependendo da proporção das massas.

2. Montando as equações que resolvem o problema

Esse problema tem solução, uma vez que a quantidade de movimento se conserva em uma colisão, e, como essa é uma colisão elástica, a energia também se conserva. Assim, podemos escrever duas equações a duas incógnitas:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A u_A + m_B u_B \tag{IV.1}$$

$$\frac{1}{2} m_A {v_A}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_B}^2 = \frac{1}{2} m_A {u_A}^2 + \frac{1}{2} m_B {u_B}^2 \tag{IV.2}$$

Substituindo $v_B = 0$ nessas equações e multiplicando todos os termos da segunda por 2, obtemos o par de equações que descreve o processo físico apresentado nesse problema:

$$m_A v_A = m_A u_A + m_B u_B \tag{IV.3}$$

$$m_A {v_A}^2 = m_A {u_A}^2 + m_B {u_B}^2 \tag{IV.4}$$

em que apenas u_A e u_B são incógnitas, portanto, sua solução fornece a grandeza buscada.

Questão 1. Substitua os valores: $m_A = 1$ kg; $m_B = 2$ kg e v_A= 3 m/s nas equações (IV.3) e (IV.4) e determine u_B resolvendo o sistema de equações obtido.

Uma maneira de encontrar a dependência da velocidade que o corpo B adquire com as massas que os blocos têm é repetir o procedimento da questão 1 para diferentes valores das massas e fazer os gráficos com os resultados obtidos. Embora não haja nada de errado com esse procedimento, este problema específico tem outra solução, que mostramos a seguir. Discutiremos as vantagens desta solução em mais detalhes ao fim do capítulo.

3. Solução algébrica.

Primeiro, transformamos as equações (IV.3) e (IV.4), reunindo os termos proporcionais a m_A no membro esquerdo das respectivas equações, que dão, após fatorar m_A:

$$m_A(v_A - u_A) = m_B u_B \tag{IV.5}$$

$$m_A({v_A}^2 - {u_A}^2) = m_B {u_B}^2 \tag{IV.6}$$

Dividindo membro a membro a equação (IV.6) pela (IV.5), pode-se notar que vários fatores cancelarão. No entanto, sempre que se divide por uma expressão algébrica, precisamos garantir que não aconteça nenhuma divisão por zero. Se $v_A - u_A = 0$, então $v_A = u_A$, portanto o corpo A não transfere movimento para o B, ou seja, não há interação entre os corpos. Note que substituindo $v_A = u_A$ na equação (IV.5) obtém-se $u_B = 0$, de modo que ou ambos os membros dessa equação são nulos, ou nenhum é[1]. Sem interação não haverá colisão, o que contraria o propósito do problema. Por isso, vamos insistir em que haja colisão, de modo que consideraremos

$$v_A - u_A \neq 0$$

o que significa, pela equação (IV.5), que também

$$u_B \neq 0$$

Assim, podemos dividir membro a membro a equação (IV.6) pela (IV.5) e, considerando que tanto m_A quanto m_B são grandezas não nulas, podemos simplificar o resultado para

$$\frac{{v_A}^2 - {u_A}^2}{v_A - u_A} = \frac{{u_B}^2}{u_B}$$

que pode então ser reescrita

$$\frac{(v_A - u_A)(v_A + u_A)}{v_A - u_A} = \frac{{u_B}^2}{u_B}$$

Após simplificação (que só é possível porque $v_A \neq u_A$ e $u_B \neq 0$, conforme discussão acima), obtemos

$$v_A + u_A = u_B \ \rightarrow u_A = u_B - v_A \tag{IV.7}$$

[1] A solução $u_B = 0$ com $v_A = u_A$ é matematicamente correta e corresponde a uma situação física possível – os corpos não interagem. Esse tipo de solução é frequentemente chamada *solução trivial* e precisa *sempre* ser identificada e descartada somente se não corresponder ao problema proposto.

Substituindo u_A da equação acima em (IV.5), obtemos a reposta

$$u_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \tag{IV.8}$$

Essa função pode ser reescrita como na fórmula abaixo e representada pelo gráfico da Figura **2**.

$$\frac{u_B}{v_A} = \frac{2}{1 + \frac{m_B}{m_A}} \tag{IV.9}$$

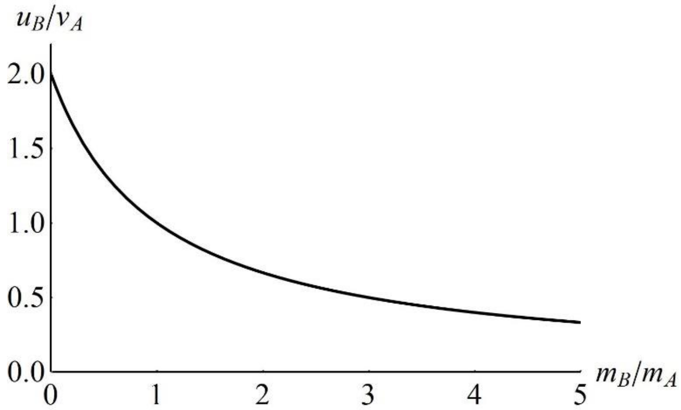

Figura 2. Velocidade do bloco B após a colisão relativa à de A antes da colisão, em função da razão entre as massas dos blocos. Note o limite $\boldsymbol{u_B = 2v_A}$ quando a massa de B é muito pequena e o comportamento assintótico assim que ela fica muito grande, caso em que $\boldsymbol{\frac{u_B}{v_A} \to 0}$.

A grande vantagem desta segunda forma da solução é o fato de servir para qualquer conjunto de dados e deixar claro que **a razão entre as velocidades** do bloco B depois da colisão e a do bloco A antes da **colisão depende somente da razão das massas** dos blocos, um resultado difícil de enxergar nas equações (IV.3) e (IV.4). Além disso, a conta é mais fácil de fazer, qualquer que seja o conjunto dos dados.

Neste texto, vamos mostrar combinações de grandezas algébricas que podem ser fatoradas e apresentar algumas estratégias de fatoração, usadas na simplificação de expressões obtidas na solução de problemas de física.

B. Fator Comum em evidência ou agrupamento

Aplica-se quando os termos apresentam fatores comuns, como por exemplo, no polinômio: $ax + ay$. Ambos os termos apresentam o fator a, que pode ser posto em evidência: $a(x + y)$. As quantidades x e y podem ser expressões, por exemplo:

$$a\,\text{sen}x + a\,\cos x = a(\text{sen}x + \cos x)$$

$$a\,\text{sen}x + b\,\text{sen}x = (a + b)\text{sen}x$$

Algumas vezes, ao colocar fatores comuns em evidência, aparecem grupos de termos comuns, que podem, por sua vez, ser postos em evidência. Por exemplo:

$$P = ax + ay + bx + by$$

Os dois primeiros termos possuem em comum o fator *a,* e os dois últimos, o fator *b*. Colocando esses termos em evidência:

$$P = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

Esta técnica é usada frequentemente em combinação com as que mostraremos a seguir.

C. Fatoração de polinômios do 2º grau

Um polinômio do 2º grau sempre pode ser fatorado, embora às vezes o resultado não seja de interpretação simples. Abaixo, vamos mostrar os vários casos na ordem de facilidade de uso.

Primeiro, a diferença de quadrados:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \tag{IV.10}$$

seguido pelo trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado, chamado trinômio quadrado perfeito. Assim,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{IV.11}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{IV.12}$$

Questão 2. Fatore

a) $1 + 8n + 16$
b) $x^2 - 4x + 4$
c) $(x - 2)^2 - (a + 2)^2$
d) $(x + y)^2 - 16a^2$
e) $(x + y)^2 - (a + 2)^2$
f) $4x^2(3x - y) - 9y^2(3x - y)$
g) $25a^4 - b^4$

Com o que foi visto no capítulo III (solução de equações), uma equação do 2º grau com coeficientes reais pode ser fatorada:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{IV.13}$$

em que x_1 e x_2 são as raízes. Note que os polinômios de grau 1 da forma fatorada somente terão todos os coeficientes reais se o discriminante da equação não for negativo. Assim, embora o polinômio sempre possa ser fatorado dessa forma, raramente ela é usada quando as raízes não são reais.

Quando o coeficiente parabólico for *a* = 1, usar a regra da soma e produto das raízes simplifica a fatoração. A fim de facilitar a identificação dos termos, trocamos, na expressão (IV.13), $x_1 = -a$ e $x_2 = -b$, obtendo

$$x^2 + (a + b)x + a\,b = (x + a)(x + b) \tag{IV.14}$$

Questão 3. Fatore os trinômios do 2º grau em uma variável.

a) $x^2 - 10x + 21$
b) $y^2 - 4y - 21$
c) $a^2 - 10a + 16$

D. Fatoração a partir dos Produtos Notáveis

Há duas formas de polinômios do 3º grau fáceis de fatorar:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(IV.15)}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{(IV.16)}$$

Questão 4. Fatore:

a) $27x^3 - 64$
b) $64x - x^4$
c) $r^6 + 1$
d) $r^6 - 1$

Os itens a e c são produtos de 2 fatores, o b de 3, e o último de 4 (quatro, sim).

Questão 5. Tanto a fórmula (IV.8) quanto a (IV.9) mostram que u_B é diretamente proporcional a v_A. Na forma da equação (IV.9), o gráfico da Figura **2** mostra a dependência do fator de proporcionalidade com a razão entre as massas.

Considerando agora a fórmula (IV.8), **determine** o fator de proporcionalidade de u_B em relação a v_A em função de m_A e da *massa total* $M = m_A + m_B$ e escreva uma frase explicando seu significado; use que m_A/M é a fração da massa total do sistema que está na partícula A.

Questão 6. Considere o sistema descrito na seção A.1, mas agora admita que a velocidade inicial de B, v_B, não é nula e é conhecida – $v_B \neq 0$. As equações (IV.1) e (IV.2) permitem resolver o problema quando se conhece também v_A. Chame a razão entre as massas de $r = \frac{m_B}{m_A}$.

a) Procedendo como no item A, determine a relação entre $(u_A - u_B)$ e $(v_A - v_B)$ e escreva uma equação relacionando essas velocidades.
b) Descreva como é o gráfico de $(u_A - u_B)/(v_B - v_A)$ em função de r.
c) Determine u_B em função de v_A, v_B e r: divida ambos os membros da eq. (IV.1) por m_B, faça a substituição $r = \frac{m_B}{m_A}$ e resolva o sistema formado por esta equação e aquela obtida no item a), eliminando u_A.
d) Determine u_A em função de v_A, v_B e r: substitua u_B do item acima na equação obtida no item a.

E. Exercícios

Exercitar é a única forma de aprender a fatorar; é preciso agilidade em reconhecer os padrões algébricos das expressões que dão fatoração, ou seja, os símbolos e números que aparecem na expressão tem o jeito de alguma das identidades mostradas acima. Estes exercícios combinam as técnicas apresentadas no texto.

1. Fatore os trinômios do 2º grau em duas variáveis, sem expandir $(x+y)$ – interprete essa combinação como uma única variável, fazendo a substituição apenas mentalmente, sem escrever no papel um símbolo único para ela.

$$(x+y)^2-3(x+y)-10$$

$$(x+y)^2-(x+y)-12$$

$$(x+2)^2-(x+2)-20$$

2. Fatore de acordo com o modelo:

$$2xy^2(3y-x)-x^2(x-3y)^2=x(3y-x)[2y^2-x(3y-x)]$$

(corresponde a uma equação de 2º grau em que x virou $x(3y-x)$ e uma das raízes é 0)

a) $2ba^2(2z-w)-3b^2(w-2z)^2$
b) $x^2-(2a+b)x+2ab$

3. Fatore de acordo com o modelo:
$x^2+(3y+5)x+(2y+3)(y+2)$ =$[x+(2y+3)][x+(y+2)]$
(corresponde a encontrar as raízes, notando que $(2y+3)+(y+2)=(3y+5)$)
a) $x^2+(2y+5)x+(y+6)(y-1)$

4. Fatore de acordo com o modelo:

$$x^4-6x^2+1=x^4-2x^2+1-4x^2=(x^2-1)^2-(2x)^2=(x^2-1+2x)(x^2-1-2x)$$

(o termo $-6x^2$ foi decomposto em $-4x^2-2x^2$; precisa olho para adivinhar que vai ajudar!)

a) x^4-11x^2+1
b) x^4-23x^2+1

5. Fatore $\text{sen}^4 x-\cos^4 x$ de modo a obter uma única função trigonométrica:

6. Resolva o sistema: $\begin{cases} x-3=y \\ x^2-9=y^2 \end{cases}$

Dicas:

i. *Cuidado com a divisão por uma expressão algébrica – antes de dividir, verifique o que acontece se o denominador for nulo.*
ii. *Teste qualquer raiz que venha a obter!*
iii. *Faça um gráfico das duas funções e convença-se do resultado que obteve.*