

I. A linguagem dos gráficos e tabelas

Muitas relações entre grandezas físicas podem ser representadas por conjuntos de valores numéricos na forma de uma tabela ou um gráfico. A principal vantagem do gráfico sobre a tabela é permitir uma visualização imediata da existência (ou não) de uma relação de dependência entre as grandezas envolvidas. Em um gráfico é mais fácil imaginar uma curva ligando os pontos, o que ajuda a entender como uma grandeza depende da outra. A maior desvantagem é a perda da precisão na leitura dos valores, que podem ser registrados com toda a precisão em uma tabela, enquanto que no gráfico essa precisão é limitada a um por cento ou uma fração disso.

Começamos o texto (seção A) com um exemplo de física para motivar o estudo deste assunto. Nas demais seções, completamos a descrição do que são gráficos e tabelas com aspectos que não foram abordados nessa seção A, que gira em torno do problema apresentado, e descrevemos outras formas comuns de gráficos: circulares e de barras.

A. Um estudo gráfico do movimento de queda livre

O exemplo de motivação será a medida e interpretação de um movimento de queda livre, usando tabelas e gráficos. A equação horária de um corpo em queda livre, isto é, a função que dá a posição y em função do tempo t é

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.1)$$

Nessa fórmula, y_0 e v_0 representam respectivamente a posição e a velocidade no instante $t = 0$ s, e g simboliza a aceleração local da gravidade, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ na superfície da Terra.

1. A Tabela dos dados

Uma estudante de física mediu as posições de um objeto em queda livre em diversos instantes de tempo. Esses dados foram obtidos de um experimento com imagens como a da Tabela 1 Figura 1, cujos detalhes estão em <http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/translacao/quedaLivre>. A Tabela 1 contém todas as medidas que tomou. Uma **tabela** é um arranjo de números em linhas e colunas, com uma linha adicional que identifica e qualifica os números abaixo. Assim, como se mediu apenas a posição do objeto em função do tempo, a Tabela 1 tem somente duas colunas e, como foram tomados 7 pares de dados (posição e tempo em 7 instantes), a tabela tem exatamente 8 linhas. A célula que encabeça cada coluna define a grandeza e a unidade em que os dados dessa coluna foram medidos; aqui a primeira coluna contém os instantes de tempo, em s, e a segunda, os valores de posição, em cm.

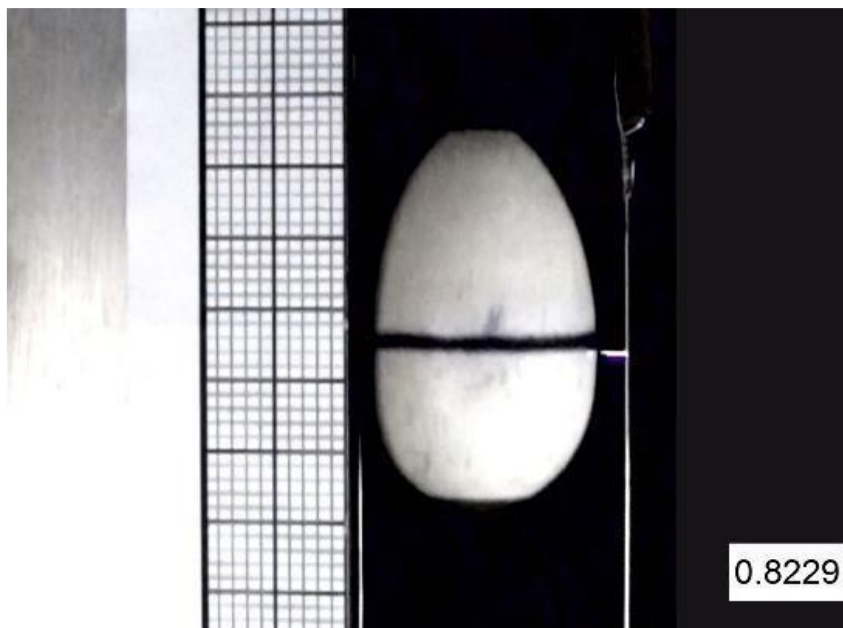


Figura 1. Imagem do corpo de prova do experimento de queda livre, que tem a forma de um ovo com um anel no meio, que é usado como referência de posição, lida na escala quadriculada à sua esquerda. O número no canto inferior direito é o instante de tempo em que a imagem foi obtida, em unidades de 0,1 s (= 1 ds). As divisões grossas da escala estão separadas por 1 cm.

Tabela 1. Posição, y , em função do tempo, t , da base do anel do corpo de prova do experimento de queda livre. Obtidos a partir do conjunto de imagens A1.

t (s)	y (cm)
0,0000	0,70
0,0188	1,00
0,0375	1,65
0,0563	2,60
0,0750	3,95
0,0938	5,60
0,1125	7,65

O outro elemento importante de uma tabela é a sua **legenda**, sempre posicionada **acima** da tabela e que discrimina a origem dos dados (aqui, o conjunto de imagens A1 do experimento de queda livre e que estão no sítio mencionado no texto) e define a que esses dados correspondem (tempo e posição, no caso).

2. Preparação de um gráfico

Uma função como a da fórmula (1.1) pode ser representada por um **gráfico**. Primeiro, desenhamos um par de linhas perpendiculares, uma horizontal e outra vertical, como na Figura 2. A linha horizontal, também chamada de eixo das abscissas, será o eixo em que marcaremos o tempo e a linha vertical, que é o eixo das ordenadas, será o lugar em que leremos as posições.

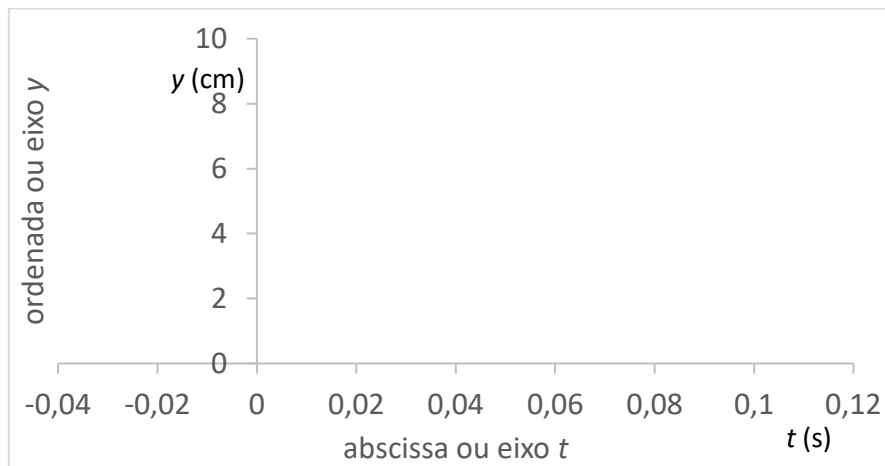


Figura 2. Sistema de eixos coordenados para feitura do gráfico da função $y(t)$. As escalas dos eixos e suas identificações são específicas deste exemplo.

Em cada eixo, marca-se, a partir da interseção entre os eixos, uma escala numérica. Na abscissa, o mais comum é marcar números positivos à direita da intersecção e negativos à esquerda, enquanto nas ordenadas, os positivos são marcados para cima e os negativos, para baixo. Note que as divisões de cada eixo são igualmente espaçadas, mas não há necessidade de o intervalo entre marcas sucessivas ser o mesmo nos dois eixos; aliás, neste caso, como a abscissa representará tempo e a ordenada, posição, os intervalos representados serão necessariamente diferentes. Aqui, escolhemos as faixas de valores a partir do que aparece na tabela 1 e esticamos um dos eixos para valores menores que zero apenas para mostrar como aparecem esses números negativos.

3. A marcação de um ponto

A fim de ilustrar a marcação de um ponto no sistema de eixos coordenados, escolhemos a posição y no instante $t = 0,1$ s. A equação (1.1), quando se substitui y_0 pela posição inicial e se supõe que o corpo tenha sido abandonado do repouso, $v_0 = 0$, fica

$$y = 0,70 + 490 t^2 \text{ em cm para } t \text{ em s} \tag{1.2}$$

em que usamos também o valor numérico da aceleração da gravidade. Substituindo $t = 0,1$ s na expressão acima, encontramos $y = 5,6$ cm. A Figura 3 mostra o mesmo sistema de eixos da Figura 2 com esse ponto marcado; as linhas horizontal e vertical tracejadas ilustram a maneira de localizar o ponto, mas **nunca** devem aparecer nos gráficos que fazemos.

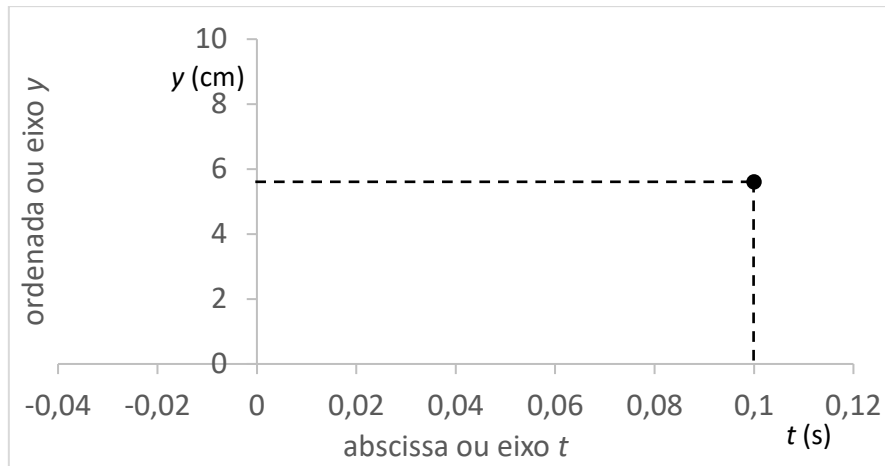


Figura 3. Ponto (0,1 s, 5,6 m) marcado no sistema de eixo. As linhas tracejadas ilustram como localizar onde marcar o ponto, mas nunca devem ficar no gráfico acabado.

4. A feitura do gráfico de uma função

A fim de representar a função da equação (1.2), podemos calcular muitos pontos e representá-los todos no sistema de eixos. O que se faz normalmente é construir uma tabela com vários pontos, marcar esses pontos, juntá-los por uma curva suave e apagar os pontos – uma função é todo o conjunto infinito de pontos representado pela linha, não os pontos que escolhemos para esboçar o gráfico.

Tabela 2. Valores calculados com a fórmula (1.2) que serão usados para orientar o desenho da linha que vai representar essa fórmula no gráfico.

t (s)	y (cm)
0,00	0,70
0,02	0,90
0,04	1,48
0,06	2,46
0,08	3,84
0,10	5,60
0,12	7,76

Com os dados da Tabela 2, fazemos o gráfico dos pontos, que está no desenho de cima da Figura 4. Em seguida, traçamos uma curva suave que passe sobre todos os pontos (desenho do meio) e, finalmente, apagam-se os pontos, deixando apenas a linha desenhada, porque a função representa os infinitos pares (t,y) que podem ser calculados pela fórmula (1.2).

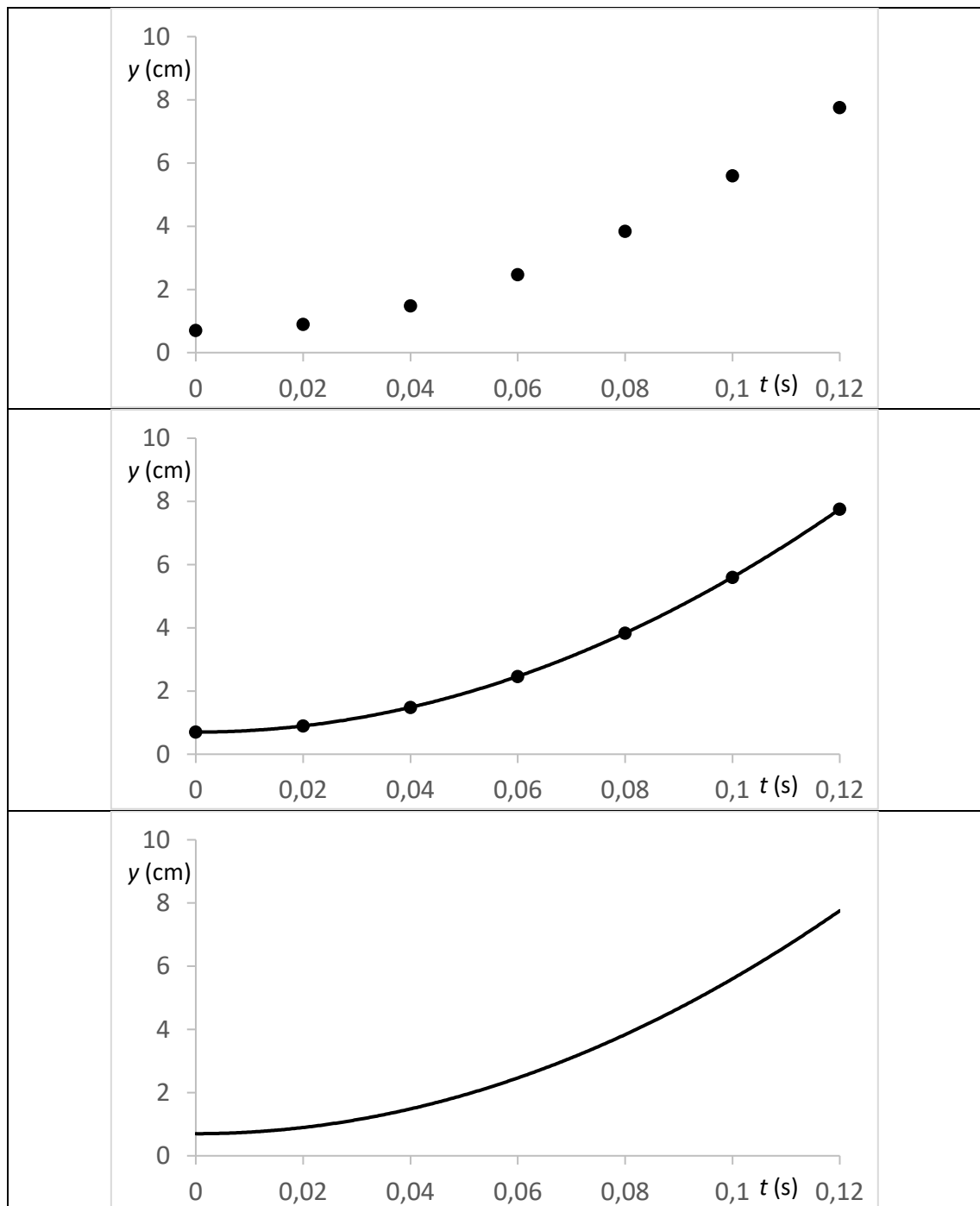


Figura 4. As figuras ilustram a sequência de construção do gráfico de uma função, de cima para baixo. Primeiro, marcam-se os pontos calculados, que neste caso estão na tabela 2. Em seguida, traça-se uma curva suave que passe por todos os pontos. Finalmente, apagam-se os pontos e deixa-se apenas a linha da curva que foi traçada.

5. Comparação entre o experimento e seu modelo

A Tabela 1 contém toda a informação experimental e a equação (1.2) representa o modelo que elaboramos para o fenômeno, cuja adequação pode ser avaliada por meio dos gráficos da Figura 5.

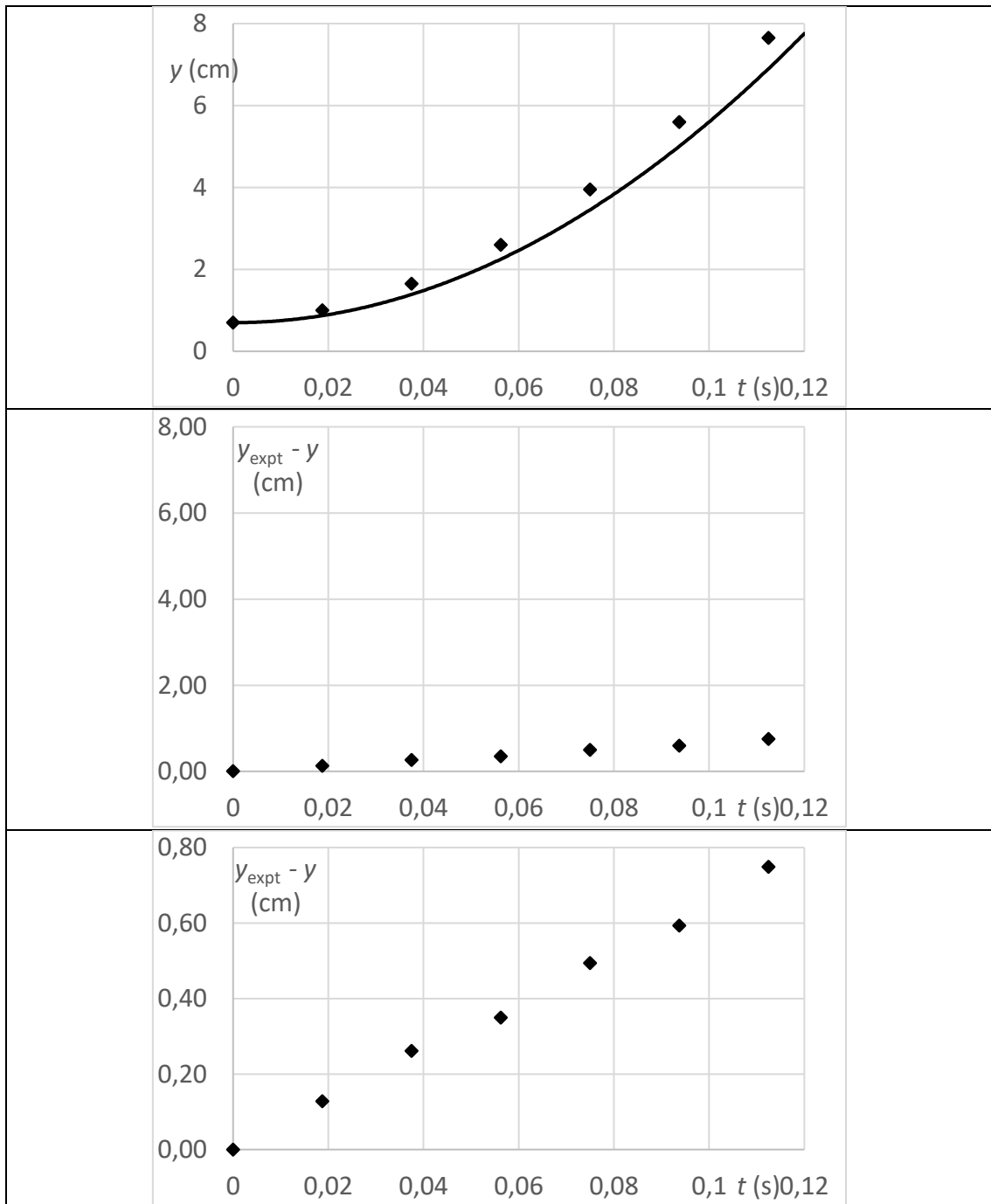


Figura 5. Comparação entre os dados experimentais 1 com o modelo. No gráfico de cima, os pontos representam os dados experimentais da tabela e a linha contínua, a equação (1.2). Nos outros dois, estão as diferenças entre os dados experimentais e os valores calculados com a equação (1,2), em escalas diferentes: a do meio, na mesma do gráfico de cima e o de baixo, com escala expandida para que os pontos ocupem todo o espaço do gráfico, a fim de ajudar a visualizar como a diferença depende do tempo.

No gráfico de cima da Figura 5 estão os dados experimentais e a representação do modelo, e fica evidente que o modelo subestima a posição, tanto mais quanto maior o tempo. Uma maneira de realçar a diferença é fazer o gráfico dessa diferença

$$y_{expt}(t_i) - y(t_i) \tag{1.3}$$

em que t_i representa um dos instantes da Tabela 1 e $y_{expt}(t_i)$ a medida da posição correspondente. A fim de fazer o gráfico, construímos a Tabela 3. Note que a primeira coluna é copiada da Tabela 1 diretamente, e a segunda calculada com a fórmula (1.3), para cada um dos instantes discriminados na 1ª coluna.

Tabela 3. Diferenças entre as posições experimentais e calculadas com a equação (1.2) para o movimento de queda livre investigado neste trabalho. Os dados da 1ª coluna são repetidos da Tabela 1.

t (s)	$y_{expt} - y(t)$ (cm)
0,0000	0,00
0,0188	0,13
0,0375	0,26
0,0563	0,35
0,0750	0,49
0,0938	0,59
0,1125	0,75

Os gráficos do meio e de baixo da Figura 5 apresentam a mesma informação que a Tabela 3. Inicialmente, mantivemos a mesma escala usada na figura de cima, mas é difícil ver detalhes nela, porque a escala está muito comprimida. A fim de resolver isso, mudamos a escala das ordenadas na figura de baixo, em que é visível que a diferença cresce uniformemente com o tempo. Isso sugere que o movimento tinha uma velocidade inicial, igual à inclinação de uma reta que passe pelos pontos. Vamos rever como fazer isso adiante, e neste caso essa inclinação é 6,5 cm/s. Assim, modificamos nosso modelo para

$$y = 0,70 + 6,5 t + 490 t^2 \text{ em cm para } t \text{ em s} \tag{1.4}$$

O gráfico da Figura 6 compara os dados experimentais com essa função. Dentro do que se pode perceber com a visão, o acordo do modelo com o experimento é perfeito.

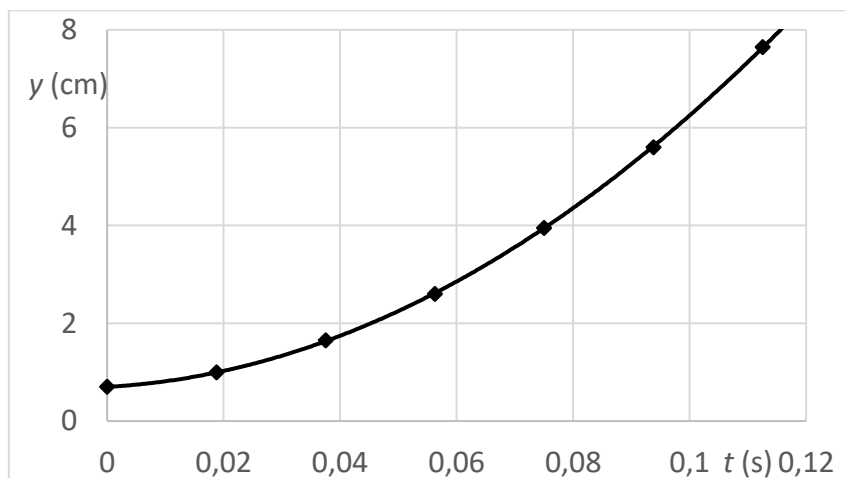


Figura 6. Os pontos representam os dados experimentais de queda livre da Tabela 1 e a linha contínua, o modelo representado pela equação (1.4).

B. Gráfico de Linhas

Neste tipo de gráfico, os pontos, definidos por duas coordenadas, são ligados por curvas que descrevem o comportamento da grandeza. Na sua construção, usamos dois eixos perpendiculares entre si: o vertical é chamado de *eixo das ordenadas* e, nos livros de matemática, costuma ser representado pela letra y , enquanto o horizontal é chamado de *eixo das abscissas* e costuma ser representado por x . Assim, cada ponto do gráfico representa um par ordenado (x,y) e cada par ordenado corresponde a um único ponto do gráfico. Este tipo é o mais usado na Física e contém muitas informações.

A Figura 7 contém os dados da evolução da mortalidade infantil ao longo dos últimos anos. Vamos usá-lo para treinar a leitura de escalas. Note que os físicos costumam ser muito mais exigentes com as escalas que os estatísticos do IBGE.

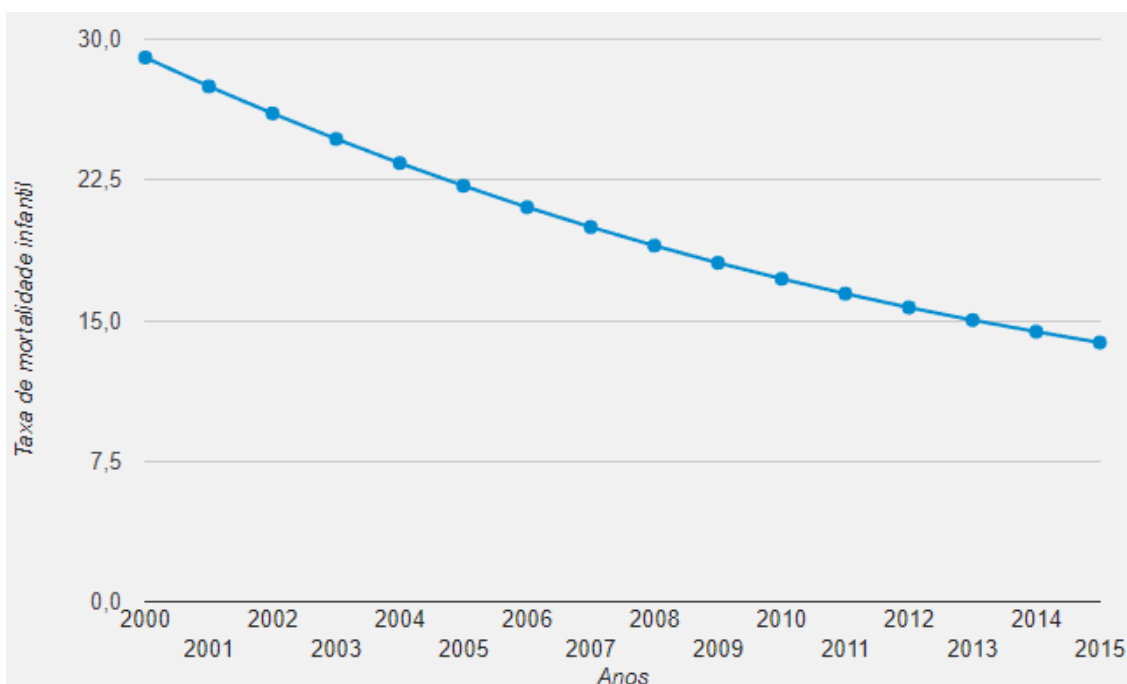


Figura 7. Taxa de mortalidade infantil por 1000 nascidos vivos. IBGE, <https://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-mortalidade-infantil.html>, último acesso em 12/4/21. Os pontos são os valores médios no ano correspondente e a linha suave que liga os pontos representa a estimativa para o período de um ano anterior ao tempo dado pela abscissa.

Questão 1. Complete a tabela abaixo com base no gráfico acima.

Ano (x)	Mortes por 1000 por ano (y)	Par ordenado (x,y)
2000	29	(2000; 29)
2002		
	22	
2007		
	15	
2015		

Podemos observar na Figura 7 que os títulos e escalas dos eixos são informações essenciais para deduzir o significado dos valores. Um gráfico de linhas *deve* conter as seguintes informações:

- Legenda – sempre abaixo do gráfico.
- Identificação dos eixos
- Unidades físicas das grandezas representadas
- Marcas de escalas nos eixos, com os valores que elas representam.

Questão 2) A primeira coluna da tabela abaixo apresenta funções $y(x)$. As demais colunas têm títulos que representam propriedades que podem ou não ser satisfeitas por essas funções.

função	crescente	decrecente	Corta o eixo y em valor positivo	Corta o eixo y em valor negativo
$y = 2x - 5$				
$y = x + 10$				
$y = -x + 5$				
$y = -5x$				

- Preencha cada célula vazia da tabela com “sim” ou “não”, conforme a propriedade se aplique à função da 1ª coluna.
- Esboce o gráfico das funções em um mesmo sistema de eixos xOy .

C. Tabelas

Uma tabela é, do ponto de vista da informação, equivalente ao gráfico. Os números de uma tabela constituem uma informação precisa, o que é diferente do gráfico, do qual é difícil obter valores numéricos com mais de dois dígitos significativos. Os gráficos, porém, são insubstituíveis na representação da dependência entre as grandezas, de modo que é muito comum transformar uma tabela em um gráfico. Quando os números registrados na tabela têm muitos algarismos significativos, arredondamos os valores de acordo com a precisão com que se desenha o ponto no gráfico; raramente se consegue representar valores com diferenças menores que 1% em pontos distintos. Como essa perda de precisão é inerente ao uso dos gráficos, é muito comum, nos trabalhos em que medidas experimentais são importantes, acompanhar o gráfico pela tabela dos dados correspondentes, de modo a preservar sua precisão, frequentemente perdida ao desenhar o gráfico.

Uma tabela, além dos conjuntos de números de interesse, tem que ter:

- Legenda – sempre acima da tabela
- Identificação das colunas na 1ª linha e/ou das linhas na 1ª coluna
- Unidades físicas das grandezas representadas.

Em uma tabela, não se repetem dados. Assim, se as velocidades de dois corpos são medidas nos mesmos instantes de tempo, ela terá três colunas, duas para as velocidades e uma para o tempo, comum aos dois dados de velocidade, como exemplificado na Tabela 4.

Tabela 4. Velocidades de dois corpos em movimento sobre uma superfície horizontal com atrito, v_1 e v_2 , em função do tempo t .

t (s)	v_1 (cm/s)	v_2 (cm/s)
4,0	5,88	22,47
4,7	5,77	22,42
5,3	5,69	22,53
5,9	5,51	22,20
6,6	5,28	21,98
7,2	4,92	21,75
7,9	4,49	21,31
8,6	4,27	20,68
9,3	4,08	20,18

Questão 3). A tabela abaixo contém os dados de um experimento de um movimento sem atrito.

Tabela Q3. A 2ª linha da tabela dá a posição de um objeto em função do tempo, na 1ª linha

$t(s)$	0,3	1,1	1,4	1,8	2,2	2,5	3,3
$x(m)$	3,89	1,32	1,02	1,18	1,98	3,01	7,51

- Esboce o gráfico de posição por tempo em um papel quadriculado. Use a escala 1 cm/1 m para as ordenadas e 2,5 cm/1 s para as abscissas. Adote 0 m e 10 m para os extremos da ordenada e 0 s e 4 s, para os limites da abscissa.
- Imagine uma curva suave ligando os pontos e sugira uma função que pudesse corresponder a essa curva.

D. Gráficos circulares

Embora menos usado que os outros dois tipos, este é muito útil quando se quer comparar a composição percentual de diferentes objetos. O exemplo da Figura 8 lida com a contribuição de cada fonte de energia no total usado no Brasil.

Esse tipo de gráfico evidencia as características predominantes – petróleo e derivados é a fonte mais importante, seguida da cana de açúcar.

E. Gráfico de Barras

A Figura 9 é um exemplo de gráfico de barras, obtido de uma pesquisa sobre a produção de nanopartículas, em que se mede o diâmetro das nanopartículas formadas. A altura da barra nesse gráfico mostra o quanto é comum o valor marcado no eixo das abscissas, no conjunto de amostras cujo diâmetro foi medido. Note que o diâmetro de um objeto é uma grandeza contínua, assim cada número marcado na abscissa identifica uma faixa de valores, ou seja, a barra desenhada no canal marcado 9,0 contém todas as partículas com diâmetro entre 8,5 e 9,5 nm; a barra no canal 10 (sem número, entre os canais 9 e 11), corresponde às partículas com diâmetro entre 9,5 e 10,5 nm. Somando as frequências exibidas no gráfico, não encontramos 100%, significando que não é relevante para a discussão em que entra essa figura o que acontece com o resto do material – pode ser que forme partículas maiores, menores, ou não forme partículas, mas o que quer que seja, não é relevante para a discussão. O próximo exemplo está na Figura 10 e é a pirâmide etária que era esperada para o Brasil em 2020.

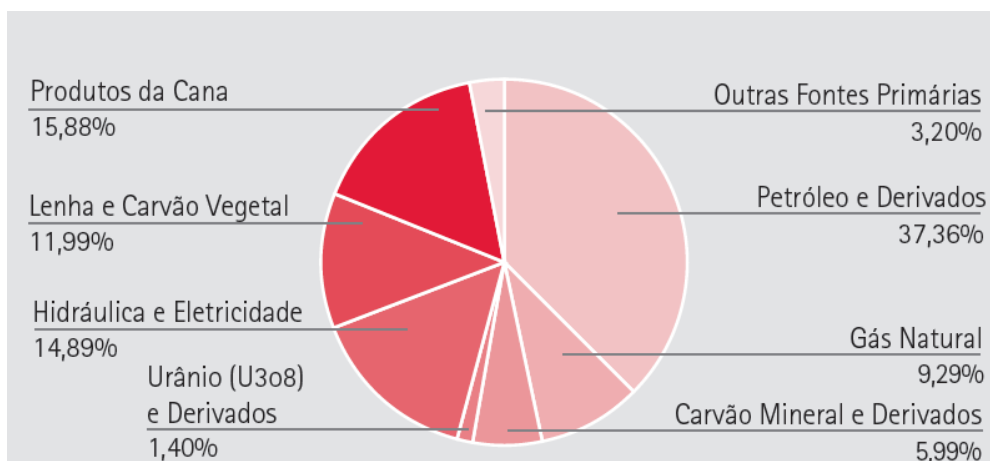
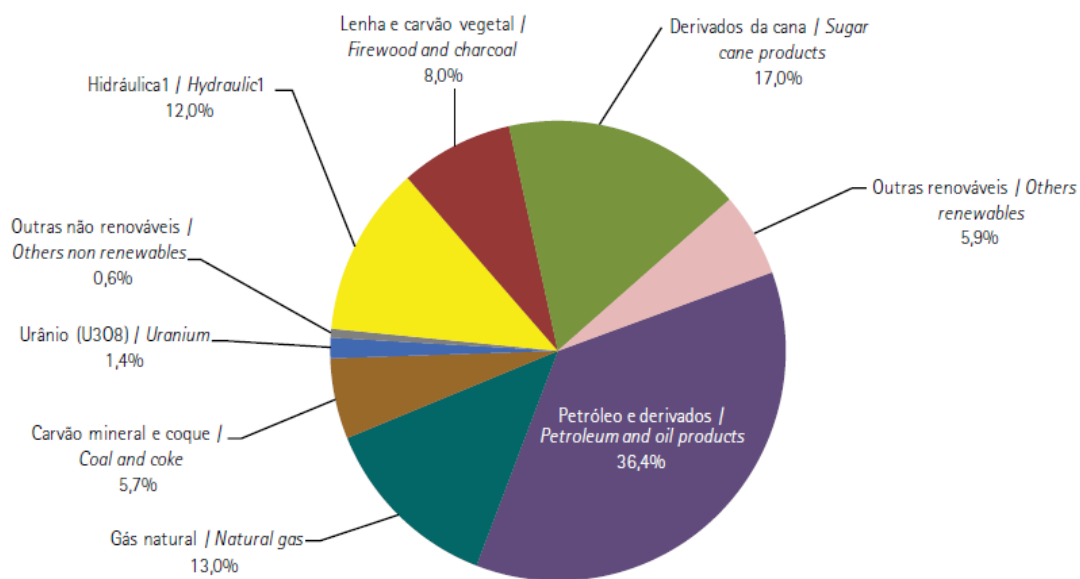


Figura 8. Contribuição das diferentes fontes de energia no consumo total do Brasil, obtidos do Balanço Energético Nacional (copiado do sítio <http://www.epe.gov.br/pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/balanco-energetico-nacional-ben>, último acesso em 12/4/2021). O gráfico de cima corresponde ao consumo de 2017 e a de baixo, de 2007.

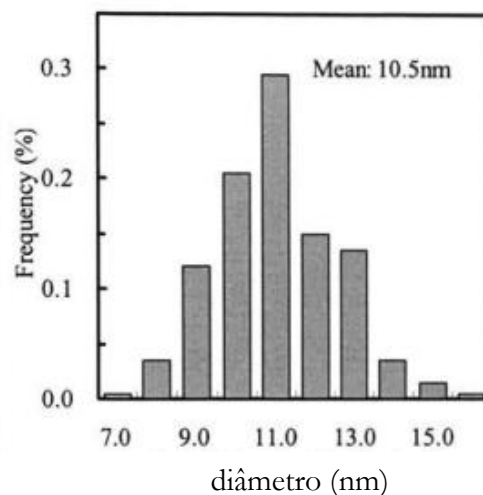


Figura 9. Distribuição do tamanho de nano partículas de CoPt_3 , produzidas por evaporação dos metais em nano tubos de Carbono. (G. Ren e Y Xing, URL http://scholarsmine.mst.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=6020&context=masters_theses, último acesso 12/4/21; figura na página 35 do documento, 43 do pdf).

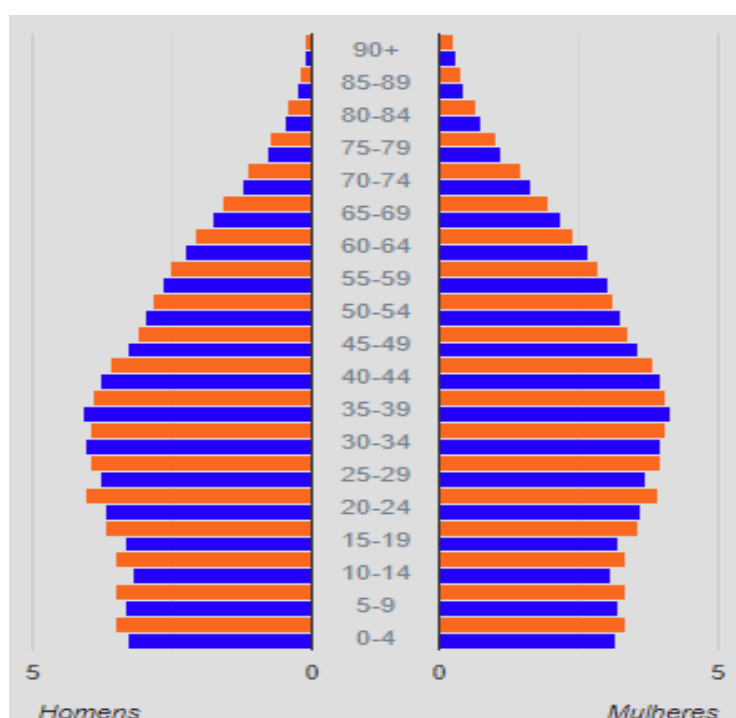


Figura 10. Pirâmide etária esperada para o Brasil (em laranja) e São Paulo (em azul) em 2021, de acordo com IBGE ([IBGE | Projeção da população](http://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html) ou <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>, último acesso em 14/4/2021). A escala horizontal está em milhões de habitantes.

Questão 4. Observe a Figura 10 e busque nela as informações para responder às questões abaixo.

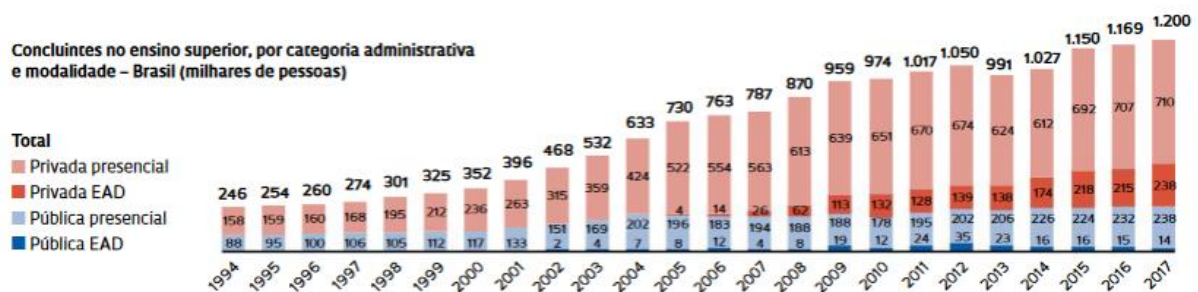
- a) Sobre o que tratam os dados representados no gráfico?
- b) Quais são os dois grupos distintos mostrados nos lados esquerdo e direito?
- c) Determine o número de idosos (> 60 anos) no Brasil de 2020 e encontre um lugar (cidade ou estado) cuja população seja comparável à dos idosos de 2020.
- d) Mulheres e homens têm a mesma probabilidade de sobrevivência?
- e) Qual a maior diferença entre SP e Brasil, nesse gráfico?
- f) Caso o número de escolas e Universidades permaneça constante, você espera que as salas de aula vão ficar cada vez mais cheias, mais vazias, ou manterão a ocupação? Que hipóteses adicionais à Figura 10 você fez para chegar na sua resposta?
- g) A concorrência pelas vagas da USP aumentará, diminuirá, ou permanecerá constante? Que hipóteses adicionais à Figura 10 você fez para chegar na sua resposta?

F. Exercícios

1) Considere os dados da Tabela 4.

- a) Esboce os gráficos das velocidades dos corpos 1 e 2, v_1 e v_2 , em função do tempo em um mesmo sistema de eixos tOv
- b) Esboce o gráfico apenas de v_1 em função do tempo usando para o eixo Ot a mesma escala do gráfico anterior e para as ordenadas (eixo Ov) uma escala em que os detalhes da variação da velocidade com o tempo fiquem mais visíveis. Faça com que o tamanho desse gráfico no papel fique parecido ao do item anterior.
- c) Embora os gráficos dos itens a) e b) correspondam aos mesmos dados, o comportamento de $v_1(t)$ parece diferente nos dois gráficos. Determine para que finalidade convém representar $v_1(t)$ pelo gráfico do item a) e em que caso, pelo gráfico do item b).

2) O gráfico abaixo foi obtido da Revista FAPESP número 272 (2018) p. 11.



- a) Descreva o gráfico em palavras, indicando faixas de crescimento ou diminuição.
- b) Faça uma tabela com os dados de 1995, 2000, 2005, 2010 e 2015.
- c) Indique se a dependência com o tempo das grandezas representadas parece constante, linear, parabólica ou outra.