UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB0562
CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

ZEB0562 – TÓPICO 10: PARTE 2/5

PVC – EDO ORDEM 2: MDF PARA PONTOS INTERNOS

- MDF – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS
- MDF EXEMPLO: CONDUÇÃO 1-D PERMANENTE

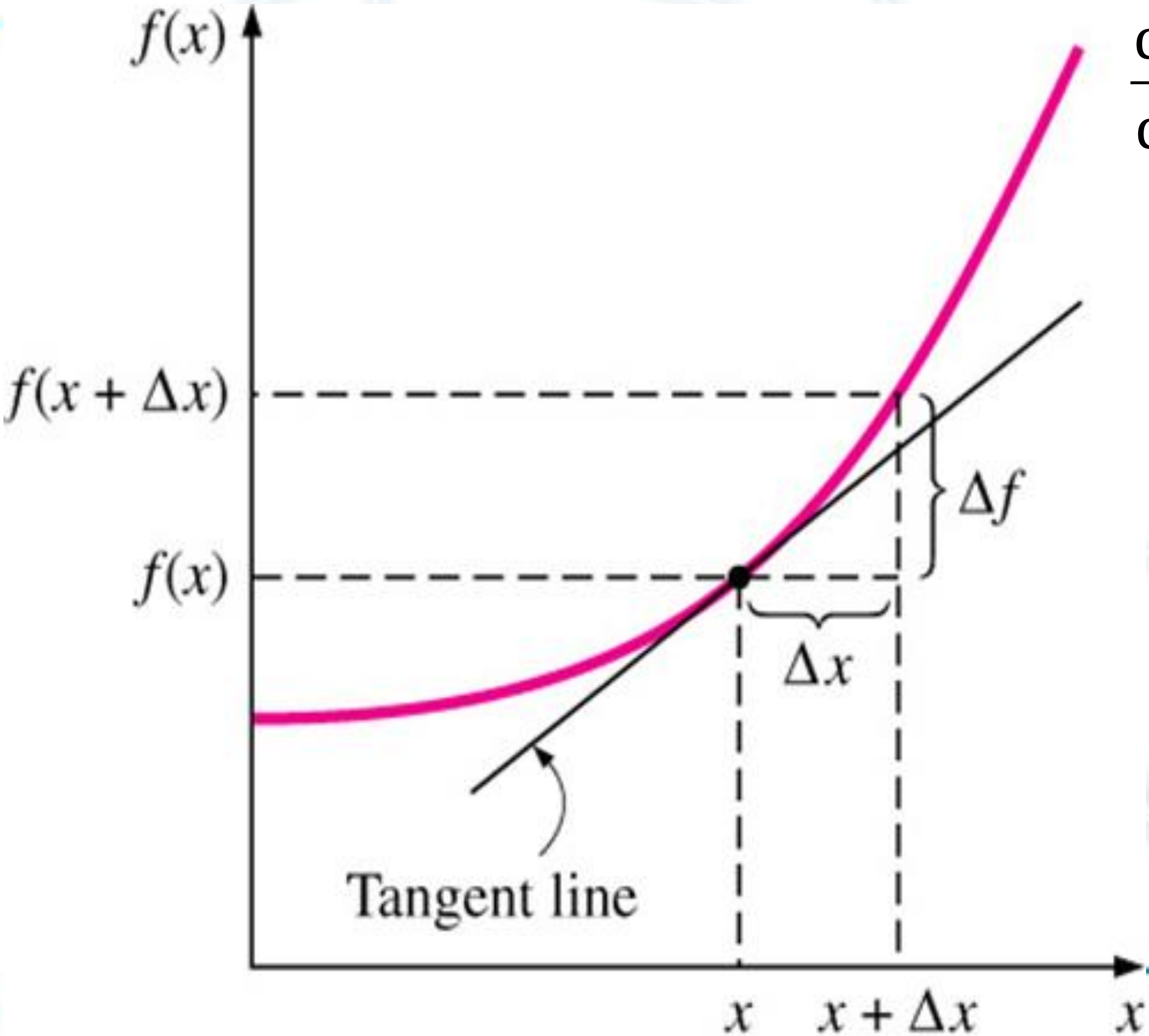
↓

DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE SOLUÇÃO
APROXIMAÇÕES PARA DERIVADAS ESPACIAIS
EQUAÇÕES ALGÉBRICAS P/ PONTOS INTERNOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS
USP FZEA

Método das Diferenças Finitas (MDF)

- Derivada de função: aproximação em diferenças finitas



$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sem tomar o limite

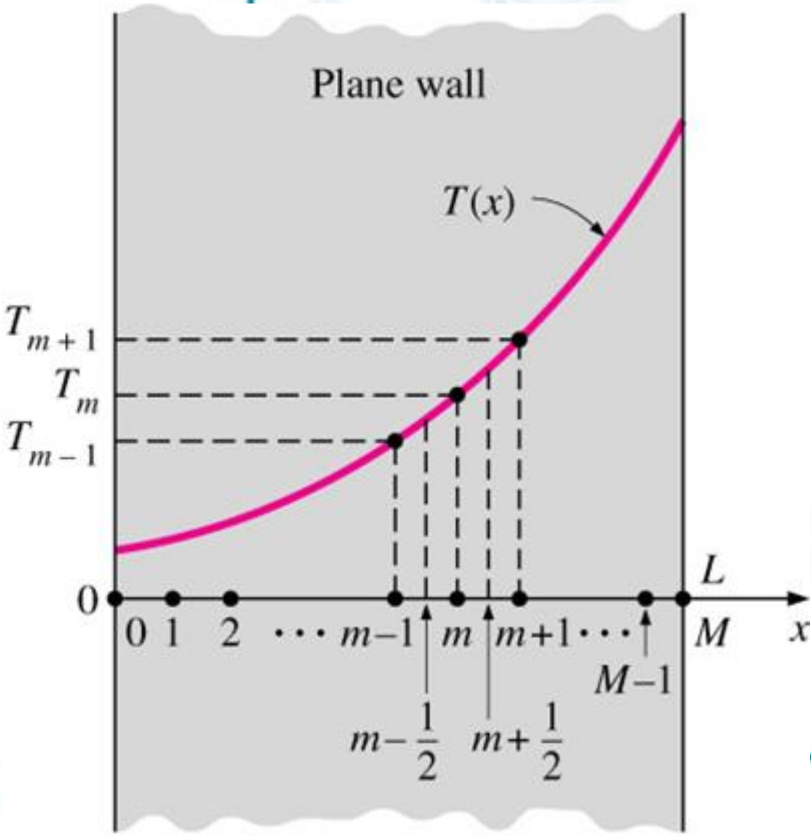
aproximação p/ a derivada

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

OBS: obtenção alternativa via expansão em série de Taylor

Ex.: MDF condução 1-D permanente

- Temperatura como função de 1 coordenada: $T = T(x)$
  - Exemplo: placa homogênea de espessura L com fonte interna
  - Equação diferencial ordinária (EDO) governante: $\dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{\dot{e}}{k} = 0$



- MDF: discretização do domínio

Subdivisão (partição) do domínio de solução

↓

Para M subdivisões uniformes: $\Delta x = \dfrac{L}{M}$

↓

$M + 1$ pontos igualmente espaçados entre si

↓

Solução numérica é avaliada nestes pontos

Ex.: MDF condução 1-D permanente

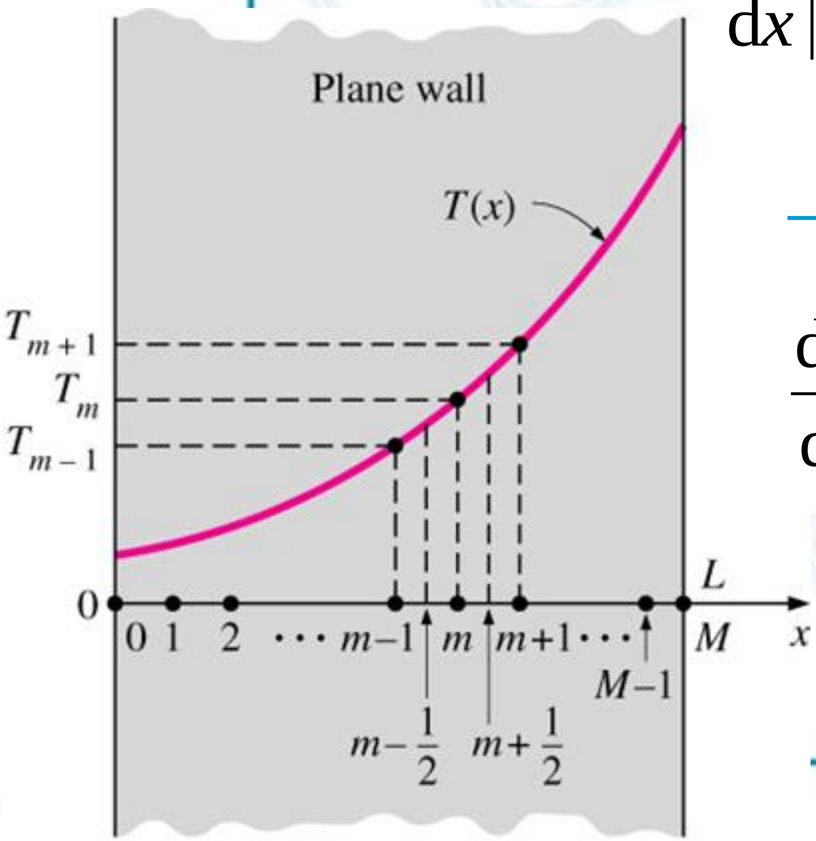
- MDF: aproximação das derivadas da função incógnita
  - Pontos intermediários (fictícios) $\rightarrow$ derivada de 1ª ordem

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{m-\frac{1}{2}} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{m+\frac{1}{2}} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x}$$

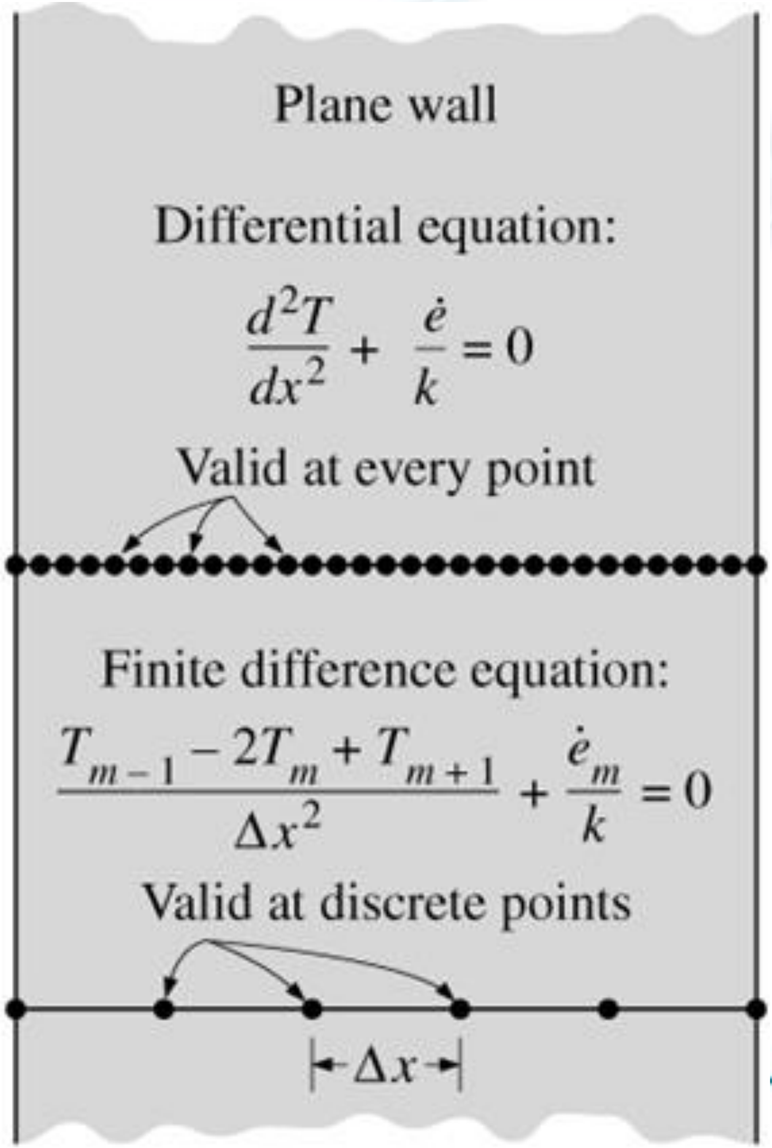
  - Pontos nodais $\rightarrow$ derivada de 2ª ordem

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\right|_m \cong \frac{\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{m+\frac{1}{2}} - \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \cong \frac{\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\right|_m = \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{(\Delta x)^2}}$$



Ex.: MDF condução 1-D permanente



- MDF: equações algébricas
  - Pontos nodais internos: $m = 1, 2, \ldots, M-1$

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\dot{e}_m}{k} = 0$$

  - Pontos sobre fronteiras: $m = 0$ e $m = M$

$$\downarrow$$

Imposição das condições de contorno