Exp 3 - Viscosidade

1. Objetivos

O estudo do atrito viscoso, ou atrito interno, que um fluido real pode exercer contra o movimento em tubulações ou contra o movimento de objetos em seu interior, pode ser caracterizado, para fluidos newtonianos, pela viscosidade absoluta (também chamada viscosidade dinâmica) deste. Neste experimento, tomaremos contato com os conceitos de viscosidade absoluta e cinemática, bem como com os regimes de escoamento de um fluido e o número de Reynolds.

2. Introdução

O movimento de fluidos em tubos ou de corpos no interior de fluidos é objeto da fluidomecânica. De maneira geral, o campo de velocidades gerado pelo movimento relativo de sólidos e fluidos só é bem comportado em situações de velocidade relativa baixa. Nesta situação, afirmamos que o regime do movimento é *laminar*. Neste regime, o fluido se comporta como se fosse composto por camadas muito finas que deslizam umas sobre as outras, com atrito. A forma dessas camadas depende da simetria do problema tratado. Nessas condições, podemos definir a **viscosidade absoluta, ou dinâmica, η**. Ela é o coeficiente de proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento τ_x que é aplicada sobre uma camada do fluido e a velocidade dv_x que esta adquire em relação à camada adjacente, dividida pela espessura dy da camada

$$\tau_x = \eta \frac{dv_x}{dy} \tag{1}$$

Esta expressão define um fluido newtoniano real. A tensão de cisalhamento em fluidos não newtonianos depende de potências de dv_x/dy diferentes da unidade.

Define-se a **viscosidade cinemática, ν**, como

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_{flu}} \tag{2}$$

onde ρ_{flu} é a massa específica do fluido (“densidade”).

Mediremos o coeficiente de viscosidade dinâmica de um lubrificante de motor de automóveis através da queda de esferas de aço nesse fluido, e compararemos os resultados com os valores tabelados a seguir.

Stokes deduziu que a força de arraste que uma esfera sofre ao se movimentar no interior de um fluido real, em regime laminar, podia ser escrita como

$$\vec{F}_{visc} = -6\pi\eta r\vec{v} \tag{3}$$

onde r é o raio da esfera e $\vec{v}$ sua velocidade em relação ao fluido. O regime em que se dão fenômenos fluidodinâmicos pode ser avaliado com o auxílio de uma quantidade adimensional, denominada *Número de Reynolds R*, calculada como

$$R = \frac{2vr\rho_{flu}}{\eta} = \frac{2vr}{\nu} \tag{4}$$

onde R>1 indica a saída do regime laminar **neste caso particular**. Quando mergulhada no fluido e em movimento de queda sob a ação da gravidade, a esfera é submetida a três forças: seu peso, o atrito dado pela Eq. (3), e o empuxo. Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para essa esfera como

$$\rho_{esf}\, V\, \frac{dv}{dt} = \rho_{esf}\, Vg - \rho_{flu}Vg - 6\pi\eta r v \tag{5}$$

onde ρ_{esf} é a densidade do material da esfera (aço, neste caso), V é seu volume, e g é a aceleração gravitacional. Como no caso da queda do paraquedista, os dois primeiros termos da direita na Eq. (5) são constantes (o peso da esfera e o peso do fluido deslocado por esta), sendo que o terceiro crescerá a partir do repouso, à medida que a velocidade aumenta. Para um certo valor da velocidade, a força total sobre a esfera (membro direito da Eq. (5)) se tornará nula em algum momento, levando assim a uma aceleração nula da esfera (membro esquerdo da Eq. (5)). Neste momento, a velocidade se tornará constante (esta velocidade é chamada de velocidade limite ($v_{\lim\infty}$)), e teremos

$$0 = \rho_{esf}\, Vg - \rho_{flu}Vg - 6\pi\eta r v_{\lim\infty} \tag{6}$$

o que possibilita obter o valor de $v_{\lim\infty}$

$$\begin{aligned} v_{\lim\infty} &= (\rho_{esf} - \rho_{flu})\frac{Vg}{6\pi\eta r} \\ &= \left[\frac{2g}{9\eta}(\rho_{esf} - \rho_{flu})\right] r^2 \end{aligned} \tag{7}$$

T (°C)	Lubrax SJ SAE 20W/50	Lubrax MG-1 Multi SAE 20W/40
0	25,00	20,00
10	11,00	8,00
20	5,80	4,00
30	3,10	2,10
40	1,84	1,28
50	1,10	0,80
60	0,75	0,50
70	0,50	0,36
80	0,36	0,25
90	0,27	0,185
100	0,21	0,14

Tabela 1: Tabela de valores da viscosidade cinemática ν em Stokes (1 St = 1 cm^2/s) de 2 tipos de óleo da Petrobras.

onde utilizamos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. $v_{\lim\infty}$ é a velocidade limite que determinaríamos se o meio em que a esfera se desloca fosse infinito. Na verdade, as paredes do tubo exercem uma força extra de arraste que reduz substancialmente essa velocidade e nos forçará a fazer uma correção. Observamos na Eq. (7) que $v_{\lim\infty}$ é proporcional ao raio da esfera ao quadrado, característica que exploraremos graficamente para encontrar o valor da viscosidade absoluta do óleo usado no experimento.

3. Material

Utilizaremos um viscosímetro bastante simples, composto por um tubo vertical preenchido com o fluido que pretendemos estudar. Na sua concepção original, este tubo deveria estar imerso em outro, cujo líquido proporcionaria um banho isotérmico, ou seja, manteria a temperatura do sistema constante durante o experimento. Este viscosímetro é, em algumas referências, denominado *viscosímetro de Stokes*, pois o método de medida da viscosidade envolve a determinação da velocidade terminal de esferas (de aço, em nosso caso) em queda no fluido, um problema estudado por Stokes. Para baixas velocidades, utiliza-se a fórmula de Stokes para a força viscosa, como já comentado.

4. Experimento

1. Medida da distância Δh percorrida pela esfera no óleo e do diâmetro dela ($2r$), junto com o cálculo dos erros: para a escolha e a medida de Δh, vocês devem se certificar de que o trecho escolhido será percorrido em MRU, mesmo para a esfera de maior diâmetro, que será a mais rápida. Discutam essa escolha com o seu professor. Para a medida dos diâmetros das esferas, vocês receberão uma caixa de plástico, com 8 compartimentos, contendo num dos compartimentos esferas de mesmo tamanho identificadas por um número de 1 a 8. Cada grupo da classe receberá um conjunto diferente de esferas (com número diferente) e será responsável por todas as medidas e todos os cálculos relacionados com aquele tipo de esfera. No final da aula, compartilharemos todos os resultados de cada grupo de maneira a termos um grande conjunto de dados obtido sem a necessidade de cada grupo fazer todas as medidas e cálculos. Tomem quatro esferas daquele tipo que receberam, meçam os seus diâmetros e registrem os resultados na coluna correspondente do guia. Mantenham separadas as esferas medidas num outro compartimento, pois elas serão lançadas no tubo com óleo. A tabela tem espaços para o tratamento estatístico das quatro medidas feitas: primeiro a média das medidas, seguida pelo desvio padrão da amostra, o desvio padrão da média, e a incerteza combinada que leva em conta também as outras fontes de erro (instrumento, estatístico, método de medida, ...), conforme deverá ser discutido com o professor. Obterão então o raio médio e o quadrado dele, assim como seus respectivos desvios. Observem que

$$\sigma_{\bar{r}_c} = \frac{1}{2}\sigma_{\bar{d}_c} \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{r}^2{}_c} = 2\bar{r}\sigma_{\bar{r}_c} \tag{8}$$

ou, em termos dos *desvios relativos*[1] ,

$$\frac{\sigma_{\bar{r}^2{}_c}}{\bar{r}^2} = 2\frac{\sigma_{\bar{r}_c}}{\bar{r}} = \frac{\sigma_{\bar{d}_c}}{\bar{r}} \tag{9}$$

(sabem demonstrar tudo isso?)

---

[1] Um desvio relativo é um desvio dividido pela grandeza à qual ele se refere: $\sigma_{rel\ x} = \sigma_x/x$

2. Medida do diâmetro interno do tubo: o problema de uma esfera sob a ação da gravidade, em queda em um fluido viscoso que se estende até o infinito e está em repouso em relação ao referencial de laboratório, pode ser solucionado usando uma simetria cilíndrica[2]. O eixo de simetria seria proporcionado pelo vetor velocidade da esfera. No caso real, o meio viscoso é finito, estando cercado por um tubo cilíndrico vertical, similar a um tubo de ensaio. Caso a esfera tenha sido lançada exatamente no eixo de simetria do tubo, as paredes deste também seguiriam a simetria cilíndrica mencionada anteriormente, mas agora em uma situação física muito diferente: as paredes do tubo impõem sobre o fluido aquilo que denominamos de *condições de contorno* de caráter geométrico e também dinâmico: elas forçam a camada de fluido imediatamente adjacente às paredes a ser perfeitamente cilíndrica e, além disso, devido à viscosidade do fluido, a velocidade dessa camada deve ser nula no referencial de laboratório. A condição imposta pelas paredes do tubo gera uma força extra, contrária ao movimento da esfera, que não está incluída na Eq. (5). O que faremos é corrigir a velocidade terminal das esferas (vejam as referências no fim). Para podermos efetuar essa correção, devemos fazer algumas medidas do **diâmetro interno D** do tubo que contém o óleo. Faremos três medidas de D, seguidas do cálculo da média, do desvio padrão da amostra, do desvio padrão da média e do desvio total.

3. Medida dos tempos de queda (no trecho em MRU): tomando agora as esferas que tiveram seu diâmetro medido e que estão separadas das outras, vamos efetuar o lançamento destas no tubo com óleo. Anotem a temperatura do fluido antes de iniciarem os lançamentos. Precisamos conhecer a temperatura durante nosso experimento, pois a viscosidade depende fortemente dela (vejam acima na tabela 1 a viscosidade do óleo em função da temperatura). Uma forma segura de não se produzirem bolhas de ar ao jogar as esferas no óleo é molhá-las previamente em óleo (existente em um copinho de plástico) antes de seu lançamento. Lancem as esferas e cronometrem o seu tempo de trajeto no trecho Δh escolhido, preenchendo a tabela. Novamente, calcularemos a média, o desvio padrão da amostra, o desvio padrão da média e o desvio total.

4. Cálculo de velocidades e correções: calcularemos agora $v_{\lim D}$ e o seu desvio através de

$$v_{\lim D} = \frac{\Delta h}{\Delta t} \qquad (10)$$

$$\sigma_{v_{\lim D}} = v_{\lim D}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta h}}{\Delta h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} \qquad (11)$$

Corrigiremos esse valor de velocidade com o auxílio de uma correção (vejam as referências), da seguinte maneira:

$$v_{\lim \infty} = v_{\lim D}\, f \qquad (12)$$

onde

$$f = (1 + x + x^2) \qquad (13)$$

[2] Imaginemos uma situação de velocidade relativa baixa, entre a esfera e o fluido, na ausência de turbulência. Veremos adiante uma forma de caracterizar esse regime.

e $$x = \frac{9r}{2D} \quad (14)$$

Considerem x e f sem desvio. Como fica o desvio de $v_{\lim \infty}$?

5. Análise gráfica – outra forma de linearização: faremos um estudo da dependência da velocidade limite corrigida $v_{\lim \infty}$ em função do raio das esferas, como indicado pela Eq. (7). Para isso, deverão usar os dados de todos os grupos que foram consolidados numa planilha pelo professor e construir um gráfico no computador, representando $v_{\lim \infty}$ (em cm/s), no eixo das ordenadas, em função de r^2 (em cm^2) no eixo das abscissas (isso será feito pelo professor!). Essa é uma forma de linearizar uma função do tipo monômio, mas encontraremos outras formas no decorrer da disciplina (Cordas vibrantes). A diferença é que aqui estamos pressupondo o valor do expoente (que teoricamente deve valer 2). Este gráfico deve apresentar um comportamento linear, pelo menos para os pontos associados às esferas menores, para as quais estaremos normalmente no regime laminar ou próximo dele. Façam uma regressão linear (decidam com o professor quais pontos levar em conta) e obtenham o coeficiente angular k da reta

$$v_{\lim \infty} = k\, r^2 \quad (15)$$

e seu desvio, onde r^2 é a variável independente.

6. Determinação das viscosidades η e ν, e do número de Reynolds R: a viscosidade absoluta η pode ser calculada observando-se as Eqs. (7) e (15), de onde se deduz que

$$\eta = \frac{2g}{9k}\left(\rho_{esf} - \rho_{flu}\right) \quad (16)$$

onde a densidade do óleo ρ_{flu} deve ser determinada com o auxílio de um densímetro, em sala de aula, e recomendamos o uso de $\rho_{esf} = 7.85\, g/cm^3$ (sem desvio) para o aço. Calculem em seguida a viscosidade cinemática ν, a partir da Eq. (2), assim como seu desvio (como se calculam os desvios de η e ν?), e comparem seus resultados com os valores presentes na Tabela 1 (talvez seja necessária uma interpolação dos valores da tabela). Quanto aos números de Reynolds R de cada esfera, calculem-nos com o auxílio da Eq (4), utilizando as velocidades reais $v_{\lim D}$, tomando cuidado com as unidades de cada grandeza (lembrem-se que R é adimensional). O critério de saída do regime laminar é dado por R>1, mas a saída é gradual e não abrupta.

5. Referências

1. J. K. Vennard e R.L. Street, *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Editora Guanabara Dois, 1978, caps. 1, 7, 11 e 13.

Para um bom estudo experimental do comportamento da força de atrito viscoso sobre uma esfera em um fluido, vejam a ref. 1 e também o trabalho:

2. R. A. Castelman, *The resistance to the steady motion of small spheres in fluids*, Technical notes, National Advisory Committee for Aeronautics, NACA-TN-231, 1926. Este trabalho pode ser obtido a partir da Internet, do *site* http://naca.larc.nasa.gov

Para a correção da velocidade limite devido às paredes do tubo, vejam a ref. **1** e os trabalhos a seguir, para verificar que a correção pode se tornar muito complexa. Todos estes trabalhos podem ser obtidos a partir da Internet.

3. R. Ladenburg, Ann. Physik **23** (1907) 447.

4. J. S. McNown, H. M. Lee, M. B. McPherson e S. M. Engez, *Influence of boundary proximity on the drag of spheres,* Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech. (1948).

5. A. Ben Richou, A. Ambari e J. K. Naciri, *Correction factor of the Stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and Poiseuil flows*, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **24** (2003) 153–165.