Lista de Exercícios para Avaliação II

① A figura abaixo representa um sistema auto-gravitante *newtoniano* de duas massas, M e m, ambas em órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema, a uma distância L uma da outra.

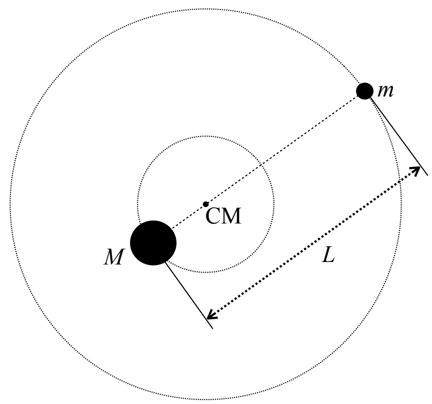

Figura 1: Sistema auto-gravitante assimétrico

(a) Calcule os momentos de dipolo e de quadrupolo de massa desse sistema (incluindo suas dependências temporais) na aproximação em que ambas as massas são puntuais; (Adote o sistema de coordenadas cartesianas inerciais que julgar mais conveniente para os cálculos.)

(b) Mostre que a frequência da onda gravitacional emitida por esse sistema é o dobro da frequência do movimento orbital;

(c) Usando o sistema acima como uma aproximação para o sistema Terra-Lua, *estime* a ordem de grandeza da mudança na distância Terra-Lua — deixando claro se aumentaria ou diminuiria —, ao longo de 10 bilhões de anos, caso essa mudança se devesse apenas à emissão de ondas gravitacionais. Além disso, *estime* a ordem de grandeza da amplitude dessa onda gravitacional a 1 unidade astronômica de distância.

② Um sistema binário de estrelas, com massas da ordem da do nosso Sol, emite ondas gravitacionais numa taxa que faz com que o período de seu movimento orbital se altere em algo da ordem de segundos a cada ano (terrestre).

(a) Supondo que se pode usar gravitação newtoniana para se estimar os parâmetros do movimento como função das massas das estrelas, *estime* a ordem de grandeza da separação entre as estrelas nesse sistema binário e do período de seu movimento orbital.

A Fig. 2 a seguir esboça as curvas de sensibilidade de diferentes observatórios de ondas gravitacionais: LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*), aLIGO (*advanced* LIGO), eLISA (*evolved Laser Interferometer Space Antenna*) e EPTA (*European Pulsar Timing Array*).

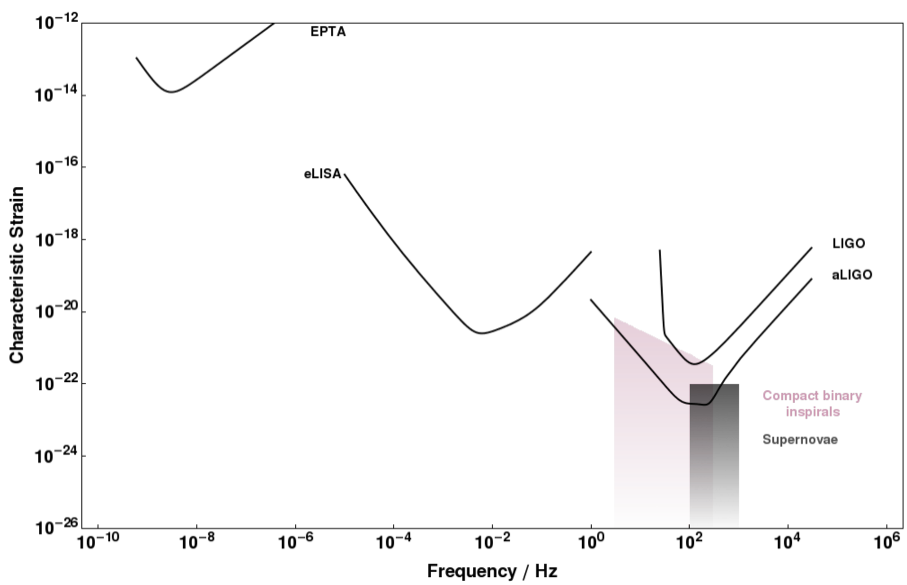

Figura 2: Curvas de sensibilidade de diferentes detectores de ondas gravitacionais.

(b) Qual dos observatórios é o mais apropriado para detectar as ondas gravitacionais desse sistema? Por que?

(c) *Estime* a distância máxima que esse sistema teria que estar da Terra para que houvesse chance de se detectar suas ondas gravitacionais. (Considere que *characteristic strain* mede a amplitude da onda gravitacional.)

③ Considere uma onda gravitacional dada, num sistema de coordenadas $\{(t, x, y, z)\}$, por

$$h_{\mu\nu} = \left(\delta^1_\mu \delta^1_\nu - \delta^2_\mu \delta^2_\nu\right) A \sin[\omega(t-z)],$$

onde $A \ll 1$ e $\omega > 0$ são constantes e a métrica do espaço-tempo é dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

(a) Mostre que $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) =$ constante são geodésicas desse espaço-tempo e calcule a aceleração relativa entre geodésicas "vizinhas", separadas por $\delta x^j = (\delta x, \delta y, \delta z) =$ constante;

(b) Considere que no instante $t = 0$, dois raios de luz são emitidos de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, um na direção x e outro na direção y. Esses raios são refletidos em espelhos localizados em $(x, y, z) = (L, 0, 0)$ e $(x, y, z) = (0, L, 0)$, retornando ao ponto inicial, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Calcule o intervalo de tempo (em primeira ordem em $A \ll 1$) entre as chegadas dos raios de luz de volta ao ponto inicial.

④ Considere uma distribuição esfericamente simétrica de matéria incompressível, com densidade própria de massa ρ_0 e raio R.

(a) Resolva a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, determinando a pressão ao longo dessa distribuição e, em particular, a pressão no ponto central;

(b) Lembrando que, por continuidade da métrica, $M := 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \rho_0$ é a massa gravitacional total do sistema em relação a observadores parados no infinito, obtenha uma expressão para a energia de ligação dessa distribuição de matéria e calcule-a para o regime $GM/(c^2 R) \ll 1$. Compare com a energia de ligação gravitacional que é obtida em gravitação newtoniana;

(c) Determine o menor valor possível para $R/(GM/c^2)$.

⑤ Embora não seja realista[1], imagine que *toda* energia potencial gravitacional da matéria esparsa e fria que formou um objeto esférico estático

[1] Devo ressaltar que o único propósito deste exercício é passar uma ideia, de modo um

fosse usada para aquecer uniformemente esse objeto. Nesse cenário (irreal), *estime* a ordem de grandeza da temperatura desse objeto no caso de um objeto com a massa e o raio do Sol (veja numa tabela esses valores) e para um objeto com a massa do Sol mas raio de 10 km. Para isso, utilize as informações abaixo:

(i) Suponha que a relação entre a massa gravitacional M e a massa própria M_p possa ser aproximada pela de um objeto com densidade uniforme:

$$M_p = \frac{3M}{2}\left[\frac{\arcsin(\sqrt{2GM/(c^2R)})}{(2GM/(c^2R))^{3/2}} - \sqrt{\frac{c^2R}{2GM}\left(\frac{c^2R}{2GM}-1\right)}\right];$$

(ii) Considere que *se* o objeto estivesse frio, então $M_p = Nm_B$ — ou seja, o objeto é formado por N partículas com massa de repouso média m_B;

(iii) *Estime* a temperatura T evocando o princípio de equipartição de energia — ou seja, que cada grau de liberdade do sistema carrega, em média, energia da ordem de k_BT, onde k_B é a constante de Boltzmann;

(iv) Para obter resultados numéricos, use $m_B \sim 1$ GeV (massa do próton).

⑥ Referente ao espaço-tempo de Schwarzschild, pergunta-se:

(a) Qual o intervalo de tempo-próprio decorrido para um observador que cai radialmente em direção a um buraco negro, tendo partido do repouso de uma posição próxima ao horizonte de eventos, até atingir a singularidade? *Estime* esse valor (em unidades quotidianas de tempo) no caso de um buraco negro com aproximadamente 3 massas solares e para outro com aproximadamente 3×10^6 massas solares (como o do centro da nossa galáxia);

(b) Nesses dois casos, estime a força de maré que age sobre o observador quando ele cruza radialmente o horizonte de eventos. (Para

pouco mais concreto, da energia disponibilizada num colapso gravitacional para diferentes objetos. Há *muitas* idealizações/aproximações sendo feitas. Por exemplo, mesmo que toda a energia do colapso fosse, de fato, convertida em energia térmica (o que já é irreal por si só), a temperatura do objeto *não* seria uniforme, mesmo na configuração de equilíbrio térmico – devido a efeitos de *redshift* gravitacional. Todas essas sutilezas/inconsistências devem ser ignoradas neste exercício.

essa estimativa, considere que cada metade do corpo do observador é como se fosse uma massa de cerca de 50 kg separadas por uma distância típica de 1 m.)

⑦ Uma nave está em movimento circular uniforme com velocidade angular Ω (assim como medida por um observador estático no infinito, por simplicidade) em torno de um buraco negro. A coordenada radial (de Schwarzschild) do movimento é $r = R$.

(a) Calcule a 4-aceleração (a^μ) e a aceleração própria ($a := \sqrt{a^\mu a_\mu}$) dessa nave, deixando claros sua direção e sentido;

(b) Se na configuração do enunciado (raio R e velocidade angular Ω) os propulsores principais da nave já estão no máximo de seu empuxo, qual estratégia o piloto deve utilizar (aumentar ou diminuir Ω, usando propulsores laterais) para se afastar do buraco negro? Analise os casos $R > 3GM/c^2$ e $R < 3GM/c^2$ e interprete o resultado em termos da "força centrífuga" existente no referencial da nave;

(c) O que acontece com a "força centrífuga" exatamente em $R = 3GM/c^2$? O que esse valor de R tem de especial para trajetórias de raios de luz e o que isso implica para a impressão visual do piloto nessa posição com relação à geometria dessa trajetória?

⑧ Um feixe paralelo de luz vindo do infinito com seção transversal circular de raio a se dirige a um buraco negro de massa M, com o centro do feixe exatamente na direção radial. Define-se a *seção de choque* de captura do buraco negro como sendo a maior área de seção transversal desse feixe que é completamente engolido pelo buraco, $\sigma = \pi a_{max}^2$. Calcule o valor dessa seção de choque.

⑨ Considere o colapso simétrico de uma casca esférica com massa gravitacional M (mantida constante durante todo o colapso). As regiões interna e externa à casca são cobertas com coordenadas $\{(cT, R, \theta, \varphi)\}$ e $\{(ct, r, \theta, \varphi)\}$, respectivamente – com R e r sendo as coordenadas radiais areais nas respectivas regiões, T o tempo-próprio do observador em $R = 0$ e t o tempo-próprio de observadores estáticos no infinito. Considere que a equação horária radial da casca é dada, nas coordenadas internas, por $R = R_c(T)$.

(a) Quais os elementos-de-linha das regiões interna e externa nessas coordenadas? Justifique;

(b) Considerando que eventos sobre a casca podem ser localizados tanto por valores de $\{(cT, R, \theta, \varphi)\}$, quanto de $\{(ct, r, \theta, \varphi)\}$, determine, justificando, $r(R)$ e $\dot{t}(T) := dt(T)/dT$ sobre a casca; (Obs.: $\dot{t}$ deve ser obtida explicitamente apenas em termos da função horária $R_c(T)$ e suas derivadas.)

(c) Mostre que qualquer que seja a maneira como $R_c(T)$ atravesse o valor $2GM/c^2$ em T finito, tal cruzamento sempre leva um tempo infinito assim como "medido" por observadores estáticos fora da casca.

⑩ Duas espaçonaves, com seus propulsores ligados, encontram-se paradas na mesma posição, em $r = R$, nas vizinhanças de um buraco negro de massa M. Em certo instante, digamos $t = 0$ (coordenada de Schwarzschild), uma dessas espaçonaves inicia um mergulho radial em direção ao buraco negro, seguindo uma linha-de-mundo que é uma linha reta num diagrama de Kruskal. Considerando que R satisfaz

$$e^{R/(4GM/c^2)}\sqrt{\frac{R}{2GM/c^2} - 1} = a,$$

onde a é uma constante positiva, pede-se:

(a) Esquematize, num diagrama de Kruskal, as linhas-de-mundo de ambas as espaçonaves;

(b) Qual o maior valor da coordenada temporal de Schwarzschild, $t = t_{max}$, para o qual um raio de luz emitido nesse instante pela espaçonave em $r = R$ ainda consegue ser recebido pela espaçonave que mergulhou no buraco negro?

(c) Qual o comportamento de t_{max} para $a \ll 1$ e, em particular, seu valor para $a \to 0$? Qual o tempo-próprio decorrido para a espaçonave parada em $r = R$ entre o mergulho de sua companheira e a emissão desse último sinal (nesse regime $a \ll 1$ e $a \to 0$)?