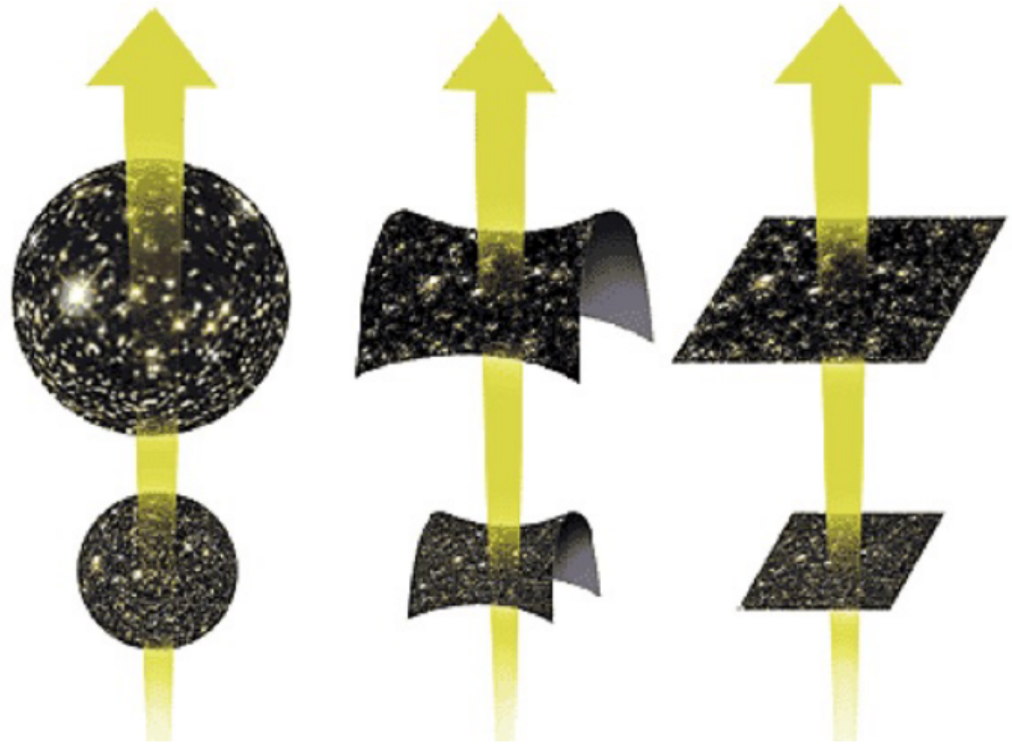
■ Dinâmica da Expansão: Equações de Friedmann



$K=1$ $K=-1$ $K=0$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left\{\frac{dr^2}{(1-Kr^2)} + r^2\left[d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2\right]\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{ac^2} \\ R_{ij} &= \left(\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{2H^2}{c^2} + \frac{2K}{a^2}\right) g_{ij} \end{aligned}\right\} R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{H^2}{c^2} + \frac{K}{a^2}\right)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \Rightarrow$$

densidade de energia

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\left(H^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{c^2}\rho \\ -\frac{2\ddot{a}}{a} - H^2 - \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} p \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}} \\ \boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p)} \end{cases}$$

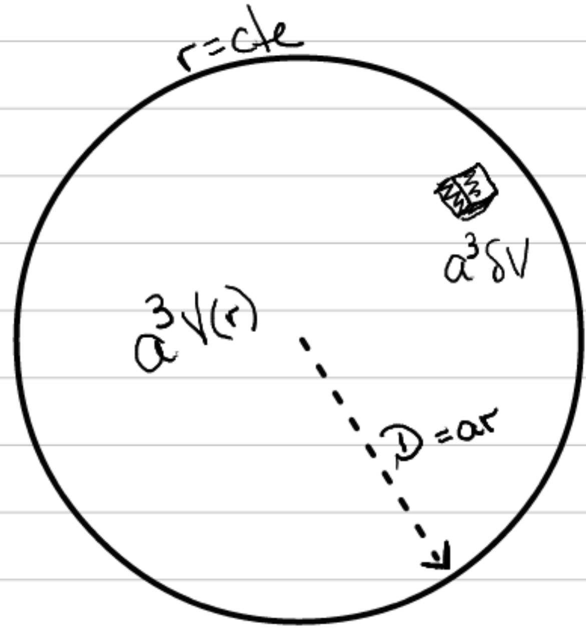
pressão

Equações de Friedmann

(2 eqs. p/ 3 funções
Necessita-se de
mais informação
p/ resolvê-las)

- Interpretação das equações

→ Eq. da "aceleração" $\ddot{a}$: No limite não-relativístico ($\rho/c^2 \to \rho_m \gg p/c^2$) e euclidiano:



$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m a \Leftrightarrow \ddot{a}r = -\frac{4\pi G \rho_m (a^3 r^3)}{3\, a^2 r^2} = -\frac{GM}{D^2} \Leftrightarrow$$

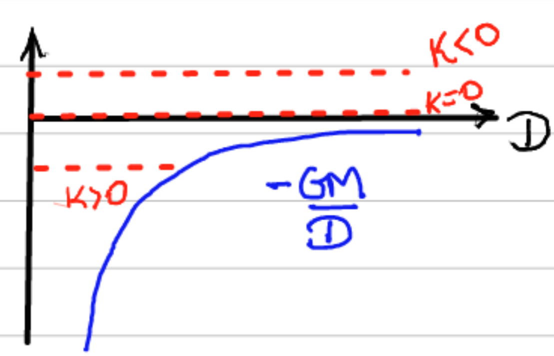
$$\Leftrightarrow \ddot{D} = -\frac{GM}{D^2}$$ Gravidade Newtoniana

Diz como o conteúdo de energia (e pressão) do universo afeta a "aceleração" de sua expansão

→ Eq. do parâmetro de Hubble: No mesmo limite,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m a^2 - Kc^2 \Leftrightarrow \dot{a}^2 r^2 = \frac{8\pi G \rho_m a^3 r^3}{ar} - Kc^2 r^2 = \frac{2GM}{D} - Kc^2 r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{D}^2}{2} - \frac{GM}{D} = -\frac{Kc^2 r^2}{2}$$ = constante p/ cada elemento de fluido



Diz se a velocidade "inicial" de expansão é maior, igual ou menor que a "velocidade de escape" para um universo com dado conteúdo de energia; determina K.

- <u>Equação de "conservação"</u>

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho a^2 - Kc^2\right] \Rightarrow 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{d(\rho a^2)}{dt} \Leftrightarrow -\frac{8\pi G}{3c^2}\dot{a}(\rho+3p)a = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{d(\rho a^2)}{dt} \Leftrightarrow$$

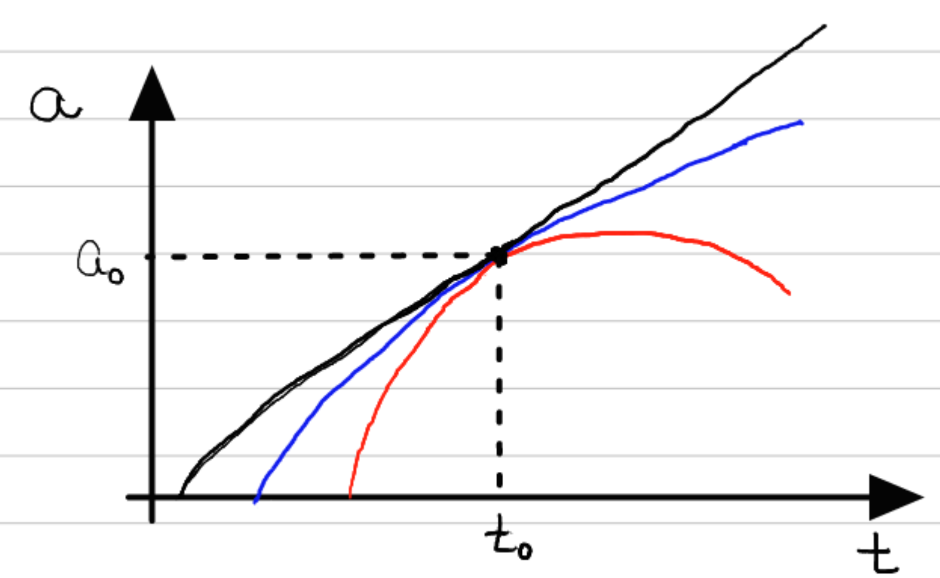
$$\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt}a^2 + 2a\dot{a}\rho = -a\dot{a}(\rho+3p) \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho+p) = 0}$$

Interpretando: $\left(\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+p) = 0\right) \times a^3 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d(a^3)}{dt} = 0 \Leftrightarrow$ × volume coordenado

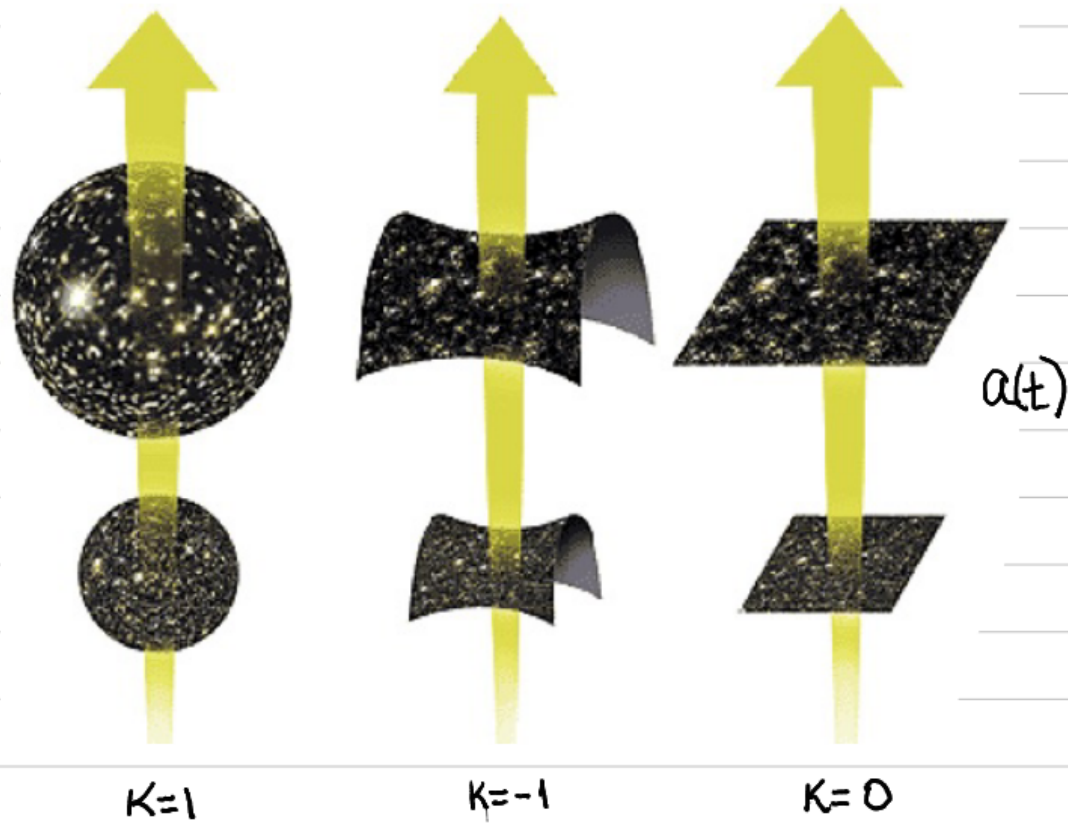
$$\Leftrightarrow \boxed{dE + p\,dV = 0}$$ 1ª lei da termodinâmica p/ processos adiabáticos ("conservação")

- <u>Comparando diferentes dinâmicas</u>

Eqs. de Friedmann $\oplus$ condições "iniciais" $\Rightarrow a(t)$



Parâmetros Cosmológicos



$$\boxed{\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) \end{aligned}}$$

Foco: a(t)

↓

Ótimo p/ análise teórica; inconveniente do ponto de vista observacional.

→ Parâmetros cosmológicos:

Eq. de estado

Parâmetro de desaceleração

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}, \quad \Omega_K := -\frac{Kc^2}{a^2H^2}, \quad w := \frac{p}{\rho}, \quad q := -\frac{(\ddot{a}/a)}{H^2}.$$

densidade crítica

O sub-índice "0" é acrescentado quando o parâmetro expressa seu valor atual (Ω_0, ρ_{c0}, Ω_{K0}, w_0, q_0, ...)

Com eles, as eqs. de Friedmann têm a forma:

$$\boxed{\Omega + \Omega_K = 1} \quad e \quad \boxed{q = \frac{\Omega}{2}(1+3w)}$$

Ω determina curvatura espacial

→ p/ dado Ω, w determina a desaceleração (ou aceleração) da expansão.

→ Parâmetros cosmológicos:

EQ. de ESTADO

PARÂMETRO DE DESACELERAÇÃO

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_c}\,,\ \rho_c = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}\,,\ \Omega_K := \frac{-Kc^2}{a^2H^2}\,,\ w := \frac{p}{\rho}\,,\ q := -\frac{(\ddot{a}/a)}{H^2}\,.$$

densidade crítica

O sub-índice "0" é acrescentado quando o parâmetro expressa seu valor atual ($\Omega_0, \rho_{c0}, \Omega_{K0}, w_0, q_0, \ldots$)

Com eles, as eqs. de Friedmann têm a forma:

$$\boxed{\Omega + \Omega_K = 1} \quad e \quad \boxed{q = \frac{\Omega}{2}(1+3w)}$$

Ω determina curvatura espacial

P/ dado Ω, w determina a desaceleração (ou aceleração) da expansão.

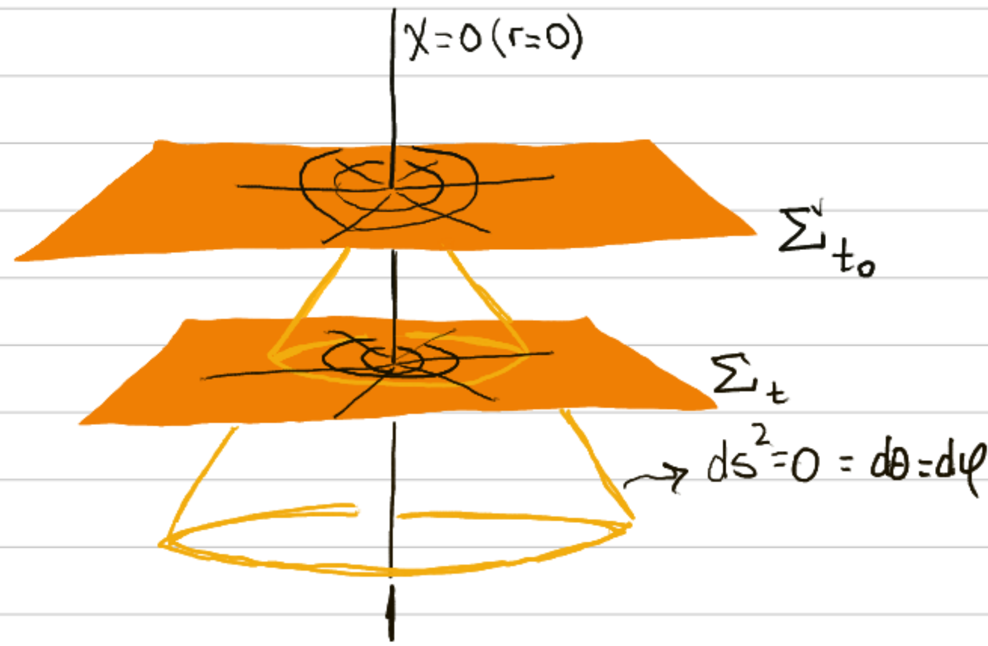
É razoável considerar que ρ e p são compostos por diferentes tipos de matéria/energia, de modo que

$$\Omega = \sum_j \Omega_j \quad , \quad \Omega_j = \frac{\rho_j}{\rho_c}$$

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\sum_j p_j}{\sum_j \rho_j} = \frac{\sum_j \rho_j w_j}{\sum_j \rho_j} \quad , \quad w_j := \frac{p_j}{\rho_j}$$

Cinemática de raios de luz e redshift

Raios de luz determinam geodésicas satisfazendo $ds^2=0$. Fixando, por conveniência, $\chi=0$ $(r=0)$ na nossa posição, temos que as trajetórias radiais ($\theta=cte$, $\varphi=cte$) satisfazendo $ds^2=0$ são automaticamente geodésicas.



$$\left.\begin{array}{l} ds^2=0 \\ d\theta=d\varphi=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -c^2dt^2+a(t)^2d\chi^2=0 \iff$$

$$\iff d\chi=\pm\frac{c\,dt}{a(t)}$$

Logo, os raios de luz que observamos hoje $(t=t_0)$ são dados por

$$\underbrace{\chi(t_0)}_{=0}-\chi(t)=-\int_t^{t_0}c\frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \iff \boxed{\chi(t)=c\int_t^{t_0}\frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})}}$$

Note que χ é apenas uma coordenada radial, não uma distância física. Para obtermos a que distância física esse raio de luz estava de nós (ou seja, de $\chi=0$) no instante t (ao longo de Σ_t), devemos multiplicar $\chi(t)$ pelo fator de escala de Σ_t:

$$\boxed{d_{luz}(t)=a(t)\chi(t)=c\,a(t)\int_t^{t_0}\frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})}}$$

Exercício: Para um fator de escala $a(t) \propto t^{\lambda}$, com $0<\lambda<1$, calcule:

a) A função $d_{luz}(t)$;

b) O instante t em que d_{luz} é máximo (em função de t_0);

c) O valor de d_{luz} máximo;

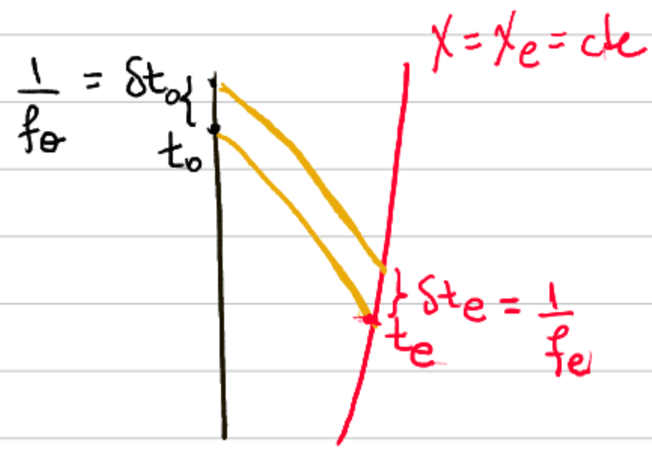
d) Esboce, num diagrama de distância física $\times\, t$, o perfil nosso cone-de-luz passado

- **Redshift cosmológico**

Considere uma fonte de luz com linha de mundo $\chi = \chi_e = \text{cte}$, $\theta = \text{cte}$ e $\varphi = \text{cte}$. A luz emitida por essa fonte que nos atinge hoje foi emitida pela fonte no instante t_e satisfazendo

$$\underbrace{\chi_0}_{=0} - \chi_e = -c\int_{t_e}^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \iff \chi_e = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})}$$

Supondo que a frequência da luz emitida seja f_e, queremos descobrir qual a frequência com que essa luz será observada hoje por nós, f_0. O diagrama abaixo nos ajuda a relacionar f_0 e f_e:



$$\left.\begin{array}{l} \chi_e = \displaystyle\int_{t_e}^{t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \\ \chi_e = \displaystyle\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \end{array}\right\} 0 = \left(\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} - \int_{t_e}^{t_0}\right)\frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} \iff \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})} = \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{d\bar{t}}{a(\bar{t})}$$

Como, naturalmente, $a(t)$ é praticamente constante durante um período $\delta t = 1/f$ da onda, temos:

$$\frac{\delta t_o}{a(t_o)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{f_o}{f_e} = \frac{\delta t_e}{\delta t_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}}$$

Se $a(t_o) > a(t_e)$, $f_o < f_e$
(redshift cosmológico)

Assim, vemos que podemos medir o quanto o universo mudou seu tamanho relativo através da mudança na frequência dos raios de luz observados.

→ Fator de redshift: Define-se o "fator de redshift" (ou simplesmente "redshift") z como sendo a mudança fracional no comprimento de onda:

$$z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{f_e}{f_o} - 1 = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1$$

Assim, o redshift de fontes cuja luz observada hoje foi emitida quando o fator de escala do universo era a, é dado por

$$\boxed{z = \frac{a_o}{a} - 1 \Leftrightarrow a = \frac{a_o}{1+z}},$$

onde $a_o := a(t_o)$

Exercício: Para um fator de escala $a(t) \propto t^{\lambda}$, com $0 < \lambda < 1$, pede-se:

a) Calcule o redshift cosmológico de fontes cuja luz observada hoje foi emitida quando o universo tinha metade da sua idade atual (Além disso, estime esse valor p/ $\lambda \sim 1/2$);

b) Calcule o redshift cosmológico associado à época em que d_{luz} é máximo (vide exercício anterior);

c) Se a idade atual do universo é aproximadamente 14 bilhões de anos, estime o redshift da radiação emitida quando o universo tinha apenas cerca de 300 mil anos (Novamente, use $\lambda \sim 1/2$).

- Equações de Friedmann em termos de redshift

Supondo que o constituinte responsável por ρ_j e p_j não interaja diretamente com os outros ingredientes, teremos:

$$\frac{d}{dt}\rho_j + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_j + p_j) = 0 \iff \frac{d\rho_j}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_j(1+w_j) = 0 \iff \frac{1}{\rho_j}\frac{d\rho_j}{dt} = -3(1+w_j)\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}(\ln \rho_j) = -3(1+w_j)\frac{d}{dt}(\ln a).$$

Supondo que w_j seja constante: $\rho_j\, a_j^{3(1+w_j)} = cte \iff \rho_j = \rho_{j0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_j)} \Rightarrow$

$$\iff \boxed{\rho_j(z) = \rho_{j0}(1+z)^{3(1+w_j)}}$$

Substituindo na Eq. de H^2:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\sum_j \rho_j - \frac{Kc^2}{a^2} = H_0^2\left[\sum_j \Omega_{j0}(1+z)^{3(1+w_j)} + \Omega_{K0}(1+z)^2\right]$$

$$\boxed{H(z) = H_0\sqrt{\sum_j \Omega_{j0}(1+z)^{3(1+w_j)} + \Omega_{K0}(1+z)^2}} \quad , \quad \sum_j \Omega_{j0} + \Omega_{K0} = 1$$

Exercício: Determine a equação de estado w do único constituinte de um universo cuja evolução é $a(t) \propto t^{\lambda}$ (e $K=0$). Aplique o resultado para determinar a evolução temporal de um universo preenchido apenas por "poeira" (matéria não relativística, $p \simeq 0$) e outro apenas por "radiação" ($p = \rho/3$).

Exercício: Expresse a Eq. de estado "efetiva" $w = \sum_j \rho_j w_j / \sum_j \rho_j$ em termos de Ω_{j0}, w_j e z (supondo cada w_j constante).