- Solução exterior

$$G_{ab} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r(1-g^{-1})\right] = 0 \Leftrightarrow g(r) = \left[1 - \frac{C}{r}\right]^{-1} \\ \frac{f'}{rgf} - \frac{(1-g^{-1})}{r} = 0 \\ \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\left(\frac{f'}{2f} + \frac{1}{r}\right)\right] = 0 \checkmark \end{array} \right\} f(r) = A\left(1 - \frac{C}{r}\right)$$

Impondo continuidade da métrica na fronteira entre a região interior e exterior e escolhendo t tal que represente o tempo-próprio de observadores estáticos no infinito, temos

$$f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right),$$

$$g(r) = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}.$$

Assim, o elemento-de-linha da região exterior ao objeto esfericamente simétrico e estático de raio R e massa M é dado por:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2}, \quad r \geq R$$

Exercício: Calcule a aceleração própria de um observador estático em $r = r_0$. Quais os valores de r_0 p/ os quais isso é possível?

→ Geodésicas tipo-tempo

A 4-velocidade u^a de uma linha-de-mundo tipo-tempo possui componentes, nas coordenadas acima, que satisfazem:

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(u^0)^2 + \frac{(u^r)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + r^2 (u^\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta \, (u^\varphi)^2$$

Pela simetria esférica, qualquer que seja o evento p_i pelo qual a linha-de-mundo passe no instante $\tau = \tau_i$, com 4-velocidade u^a_i arbitrária, sempre podemos escolher as coordenadas $\{(\theta, \varphi)\}$ de modo que $x^\mu(p_i) =: x^\mu_i = (t_i, r_i, \pi/2, 0)$ e $u^\mu_i = (u^0_i, u^r_i, 0, u^\varphi_i)$. A conveniência dessa escolha é expressa no exercício abaixo:

Exercício: Mostre que uma geodésica com as condições iniciais acima é completamente contida na subvariedade $\theta = \pi/2$. (Obs: isso pode ser demonstrado usando $u^a \nabla_a u^b = 0$ explicitamente ou usando quantidades conservadas $u^a \xi_a$, onde ξ^a é um campo de Killing.)

Com a escolha feita acima, temos que as componentes da 4-velocidade de uma geodésica tipo-tempo podem ser expressas como $u^\mu(\tau) = (u^0(\tau), u^r(\tau), 0, u^\varphi(\tau))$, com

$$-1 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)(u^0)^2 + \frac{(u^r)^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + r^2 (u^\varphi)^2 \qquad (\mathrm{I})$$

No entanto, usando que $\xi^a_{(t)} = \partial^a_t$ e $\xi^a_{(\varphi)} = \partial^a_\varphi$ são campos de Killing do espaço-tempo, temos que as quantidades

ENERGIA POR UNIDADE DE MASSA (MEDIDA NO ∞) $\leftarrow$ $$\epsilon := -u_a\xi^a_{(t)} = -u_0 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)u^0 \qquad (\mathrm{II})$$

momentum angular por unidade de massa (no ∞) $\leftarrow$ $$\ell := u_a\xi^a_{(\varphi)} = u_\varphi = r^2 u^\varphi \qquad (\mathrm{III})$$

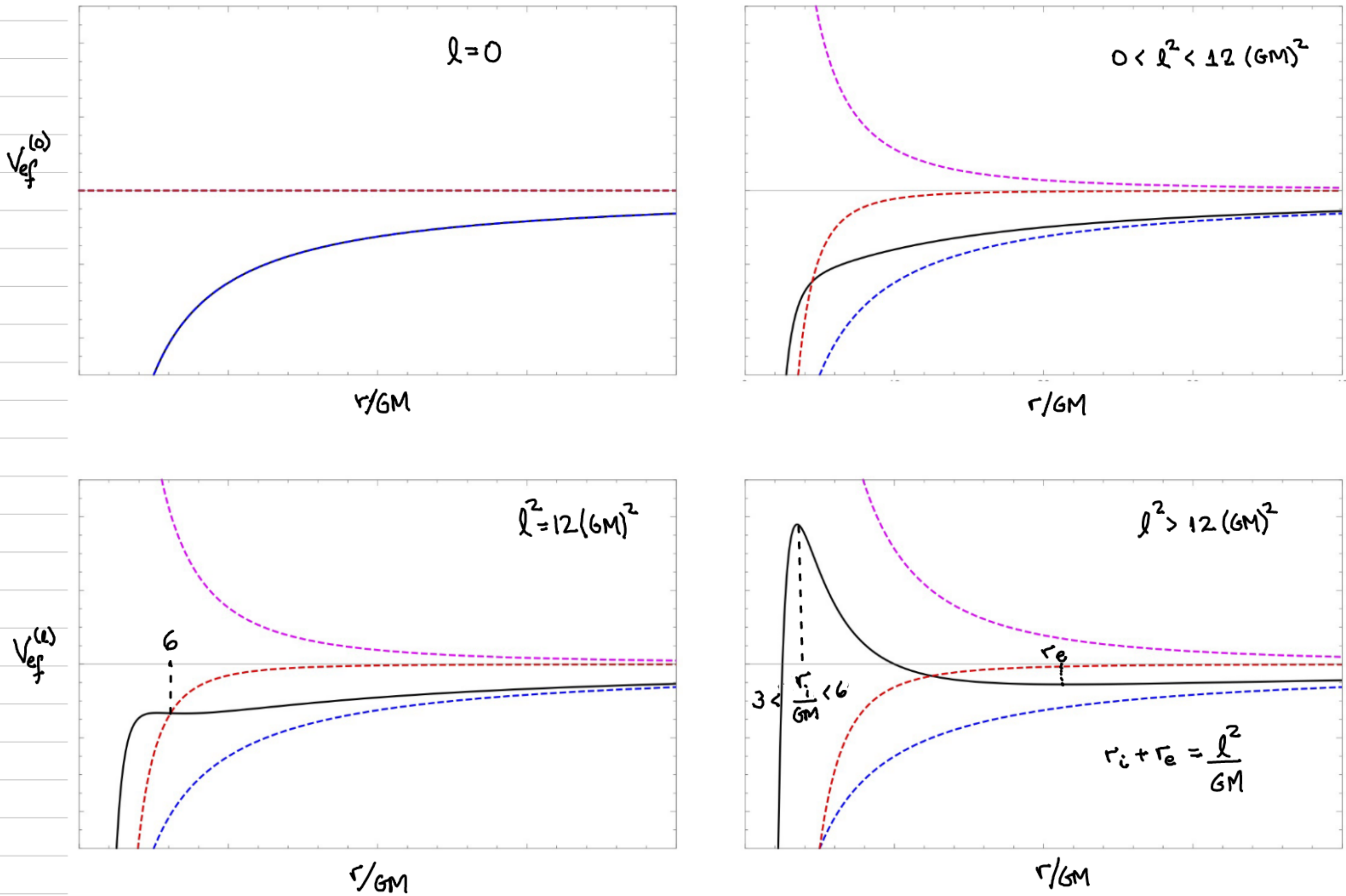
são constantes de movimento. Logo, substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$-1 = -\frac{\epsilon^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + \frac{(u^r)^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + \frac{\ell^2}{r^2} \iff$$

$$\iff \frac{(\epsilon^2-1)}{2} = \frac{(u^r)^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}\right)}_{V^{(\ell)}_{ef}(r)} = \frac{(\epsilon^2-1)}{2}}$$

$$\boxed{V_{ef}^{(\ell)} = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3}}$$



Exercício: Para um dado valor de ℓ (tal que $\ell^2 > 12(GM)^2$), calcule os valores possíveis de raio p/ órbitas circulares, deixando claro a estabilidade ou não delas.

Exercício: Para cada valor de ℓ representado nos 4 gráficos acima, discuta qualitativamente as trajetórias possíveis, dependendo do valor de E.

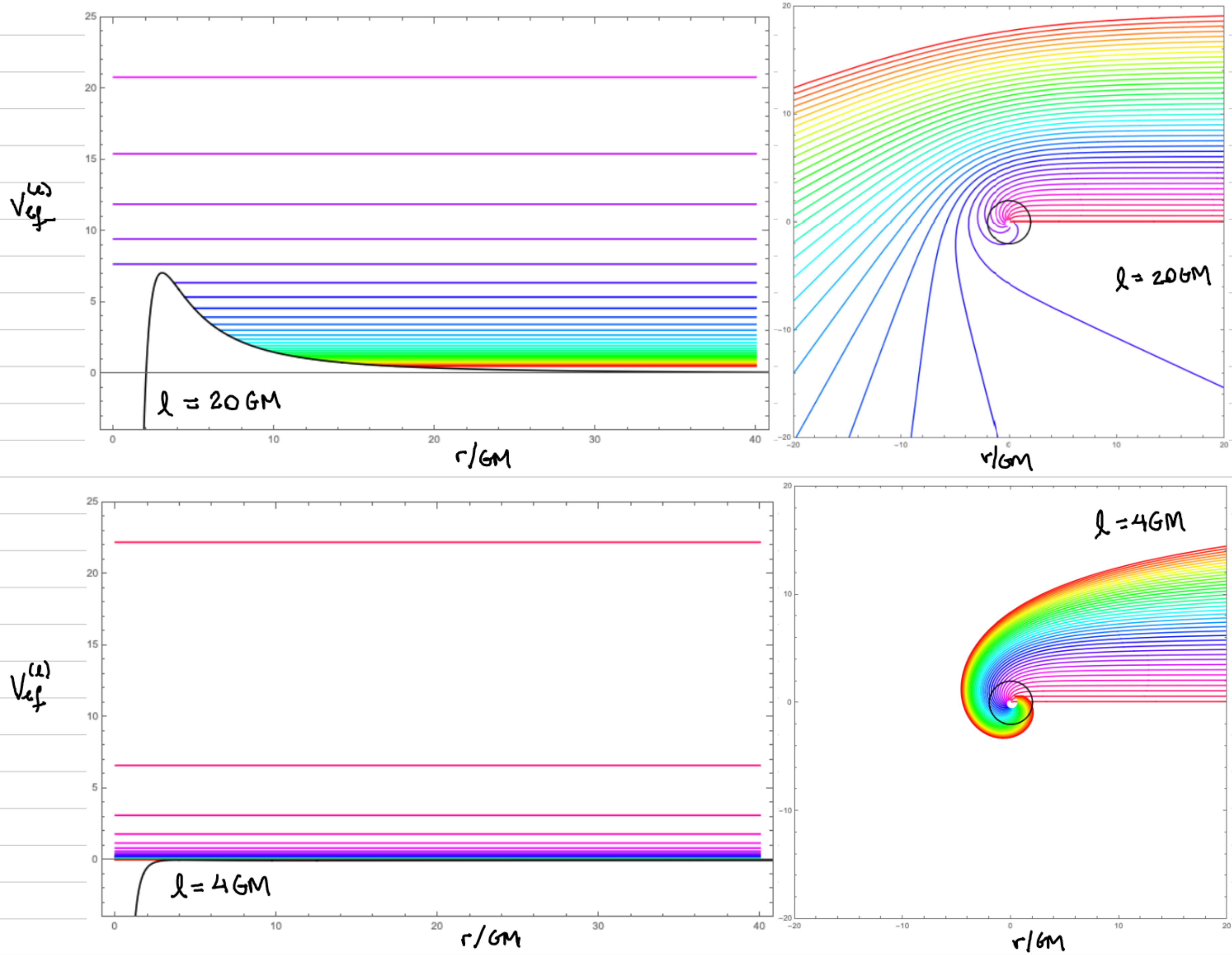
Exercício: Suponha uma trajetória vinda do infinito com parâmetro de impacto b e velocidade "inicial" (no infinito) v_∞ (assim como medida localmente pelos observadores estáticos no infinito).

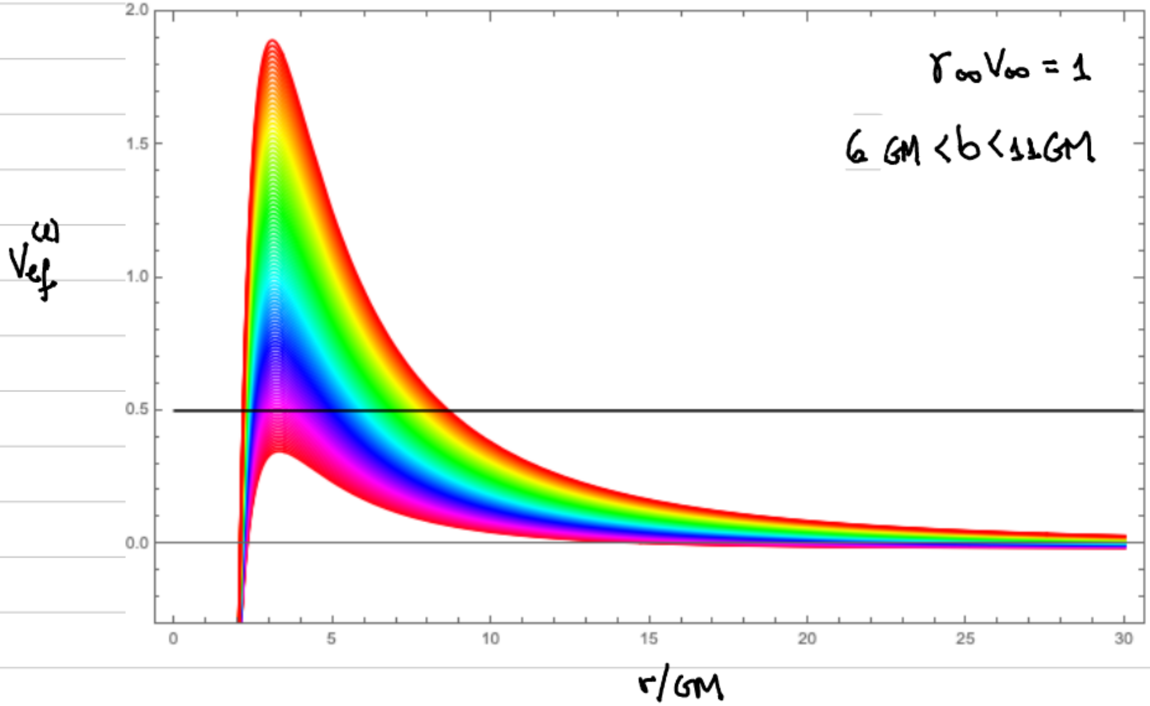
a) Expresse os parâmetros E e ℓ em termos de b e v_∞;

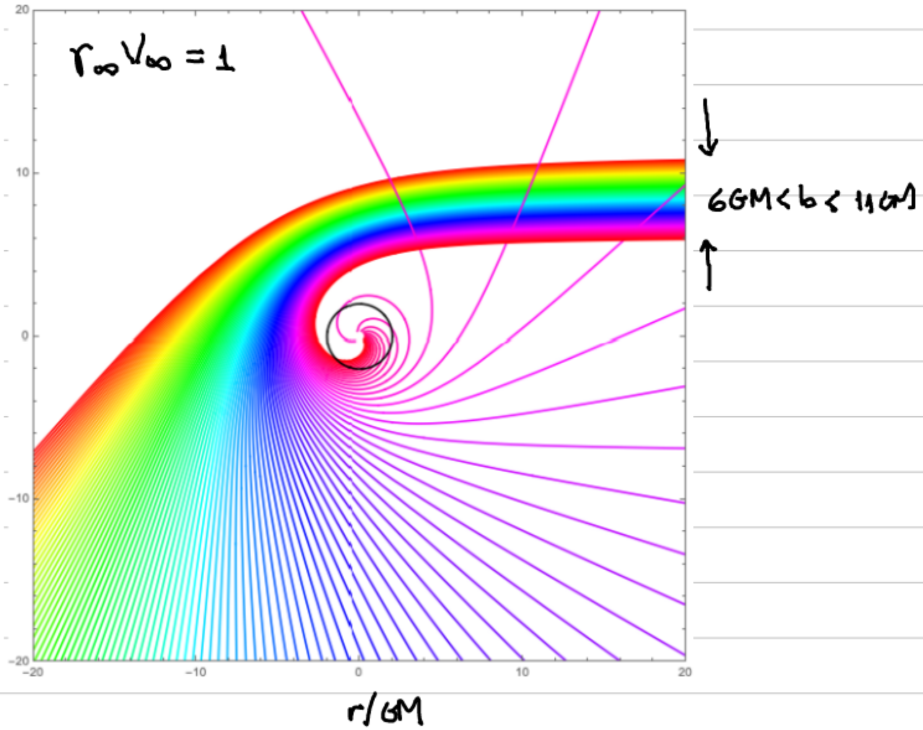
b) Mostre que se $\ell < 4GM$, a trajetória certamente será "capturada" (ou seja, atingirá valores arbitrariamente pequenos de r), independente do parâmetro de impacto b;

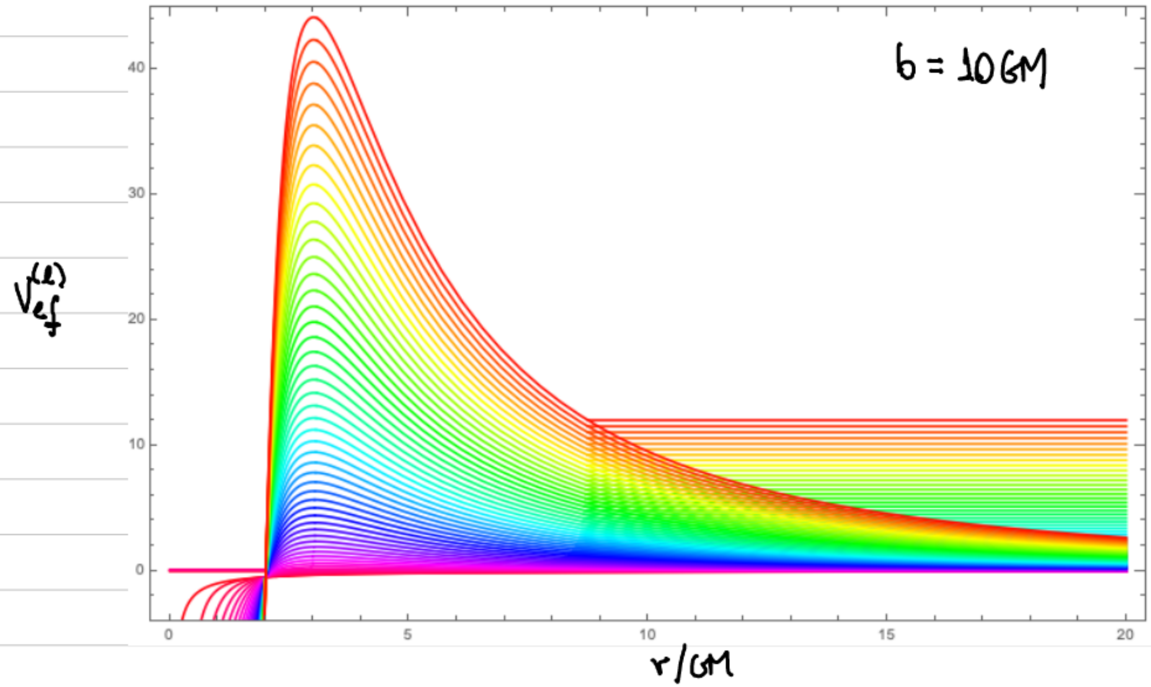
c) Mostre que se $b < 3\sqrt{3}\,GM$, então a trajetória também é capturada, independente da velocidade inicial v_∞.

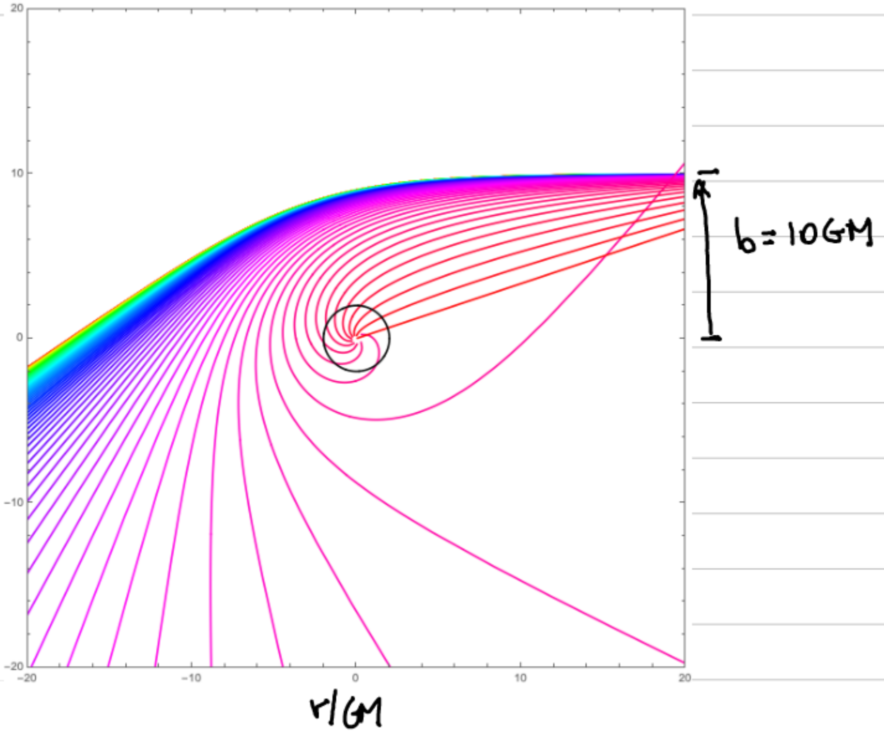
Orbitas ilimitadas



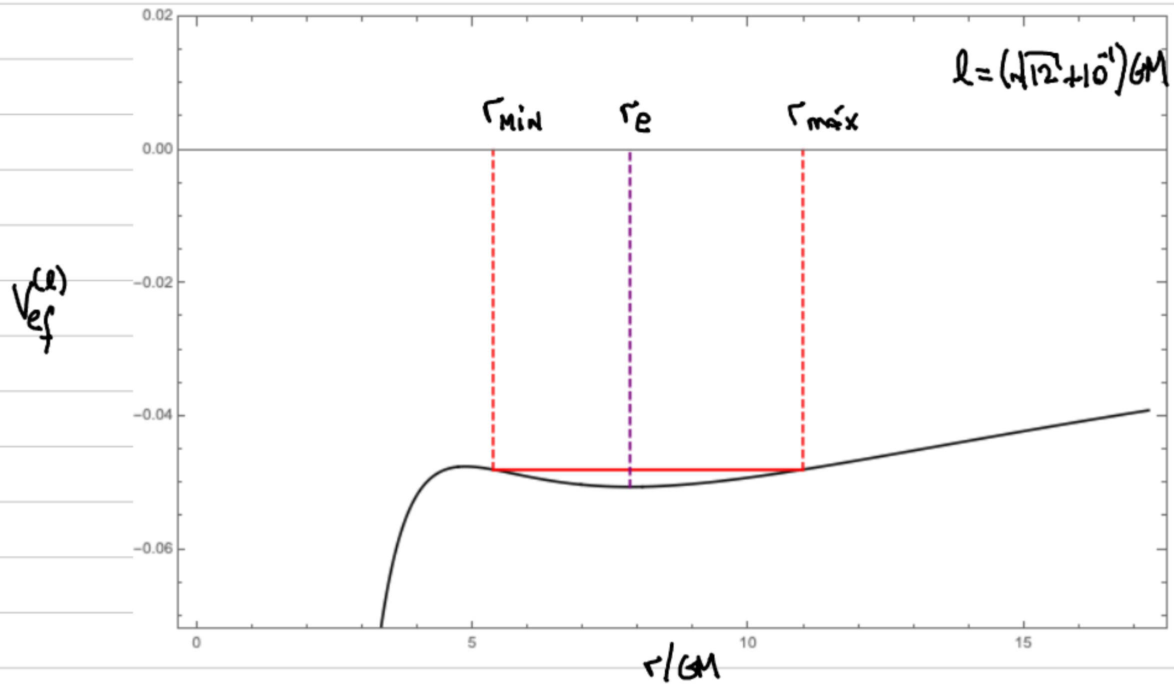

$r_\infty V_\infty = 1$
$6\,GM < b < 11\,GM$
$V_{ef}^{(\omega)}$
r/GM

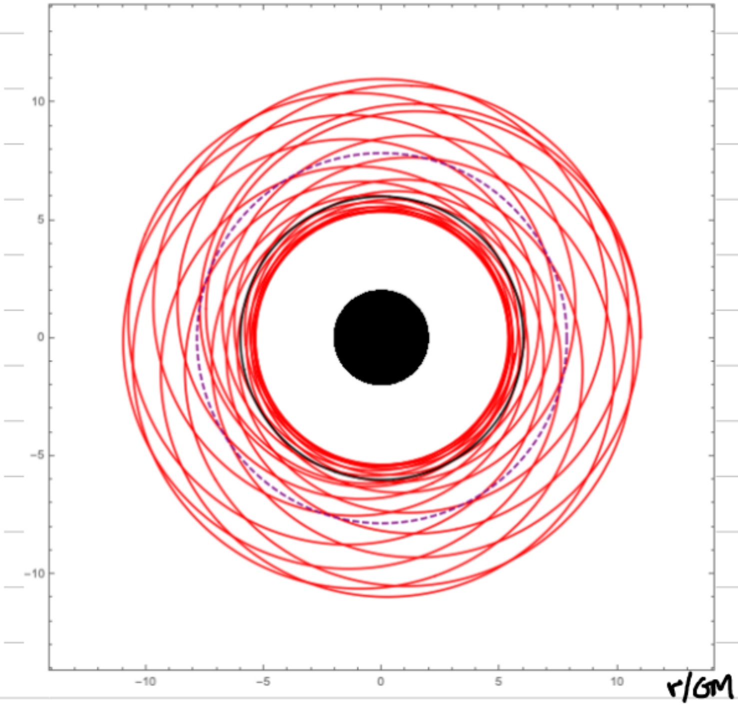

$r_\infty V_\infty = 1$
$6GM < b < 11GM$
r/GM

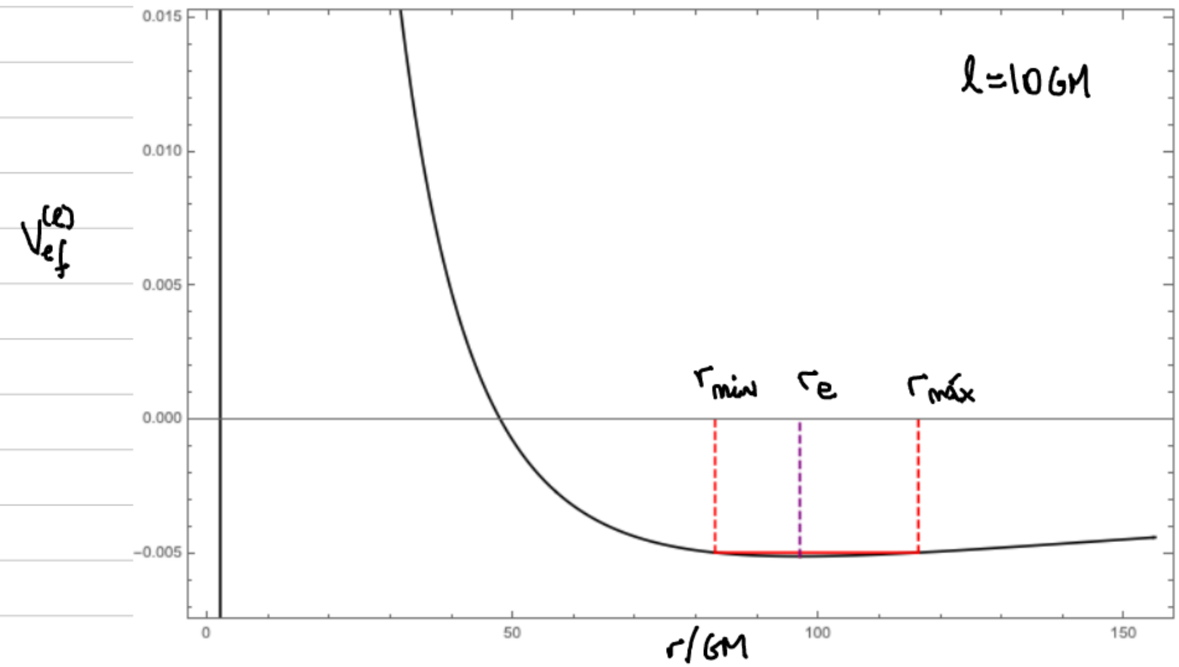

$b = 10\,GM$
$V_{ef}^{(\ell)}$
r/GM

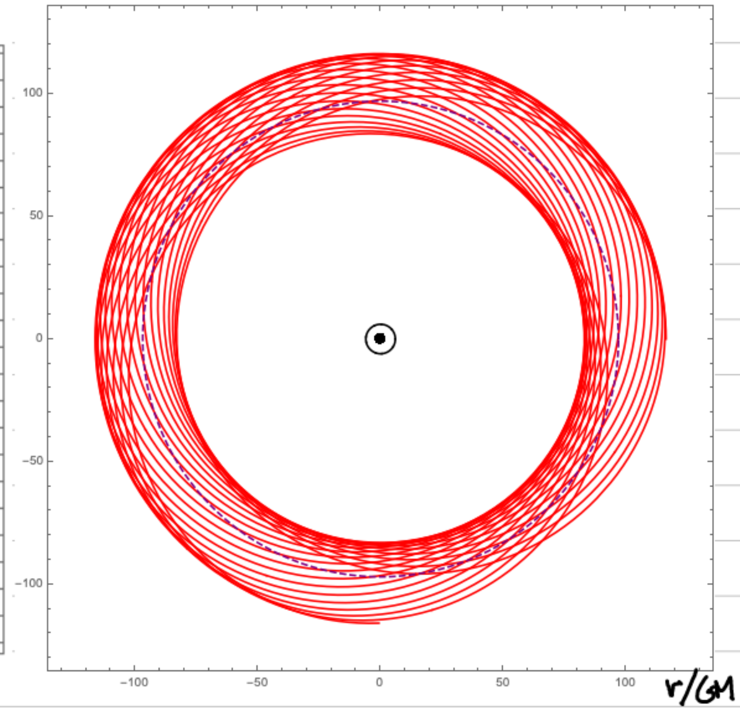

$b = 10\,GM$
r/GM

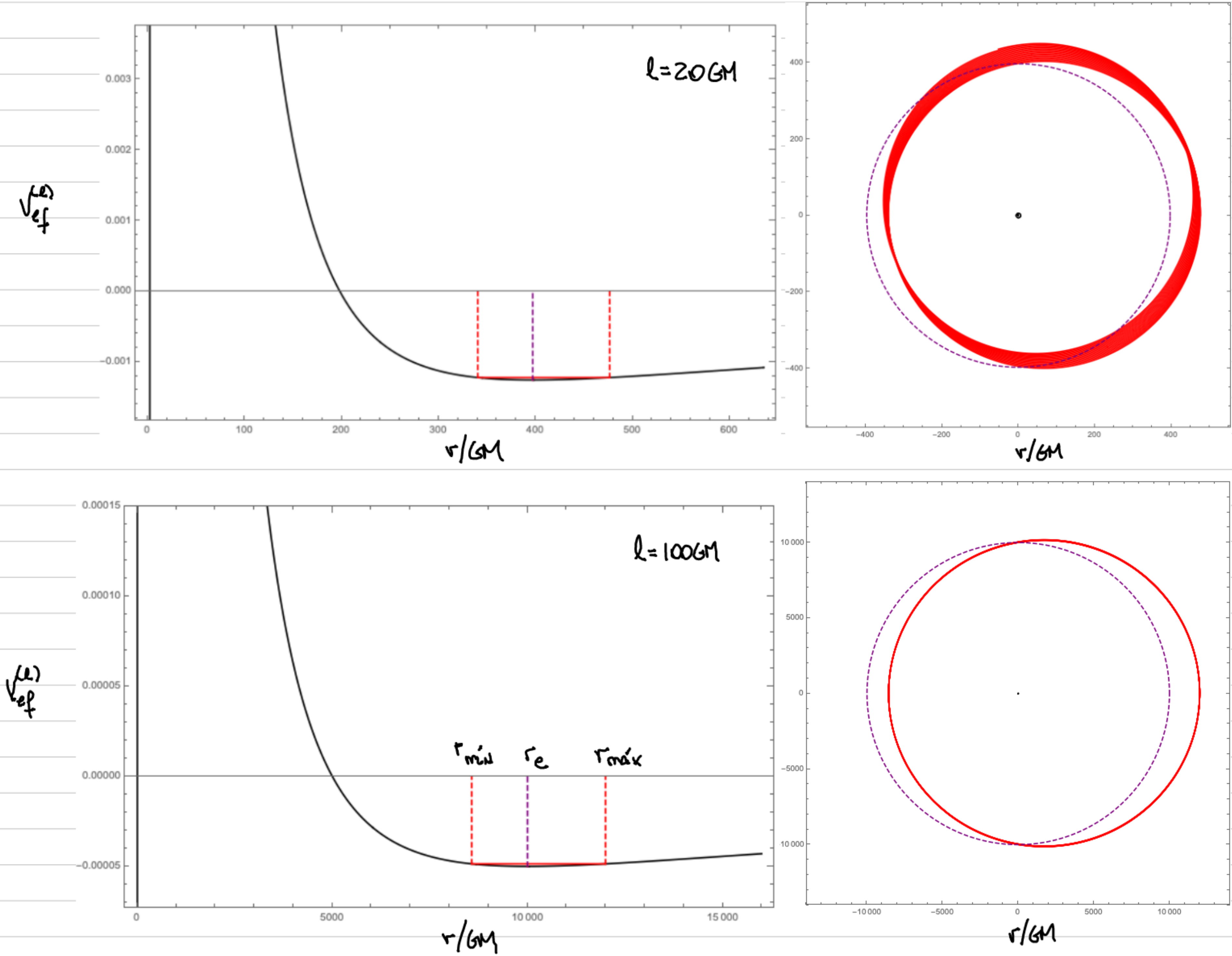
Órbitas limitadas











l=20GM
l=100GM
Vef(l)
r/GM
rmín
re
rmáx

Exercício: No regime em que $l^2 \gg GM$, calcule a "precessão angular" (ângulo por período orbital) de órbitas aproximadamente elípticas com pequena excentricidade (i.e., quase circulares), do modo explicado em aula (dessintonia dos movimentos periódicos angulares e radiais).

Exercício: Calcule a aceleração própria de uma nave em trajetória circular com raio R e velocidade angular constante Ω (assim como medida no infinito). Analise o comportamento do sentido dessa 4-aceleração como função de R; em particular, note o que acontece p/ $R = 3GM$. Como isso afeta a estratégia de tentar escapar da região $R < 3GM$; qual o modo mais fácil de escapar da região $R < 3GM$?

→ Geodésicas tipo-luz

Seguindo os mesmos passos anteriores, agora temos que a 4-vetor v^a tangente a uma geodésica tipo-luz, parametrizada por um parâmetro afim λ, satisfaz:

$$0 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)(v^0)^2 + \frac{(v^r)^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + r^2(v^\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(v^\phi)^2.$$

Os mesmos argumentos de simetria podem ser usados p/ escolher coordenadas $\{\theta,\varphi\}$ tais que a geodésica está confinada em $\theta = \pi/2$ ($\Rightarrow v^\theta = 0$). Além disso, os campos de Killing $\xi^a_{(t)} = \partial^a_t$ e $\xi^a_{(\phi)} = \partial^a_\phi$ levam às constantes de movimento:

$$\epsilon := -v_a\xi^a_{(t)} = -v_0 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)v^0$$

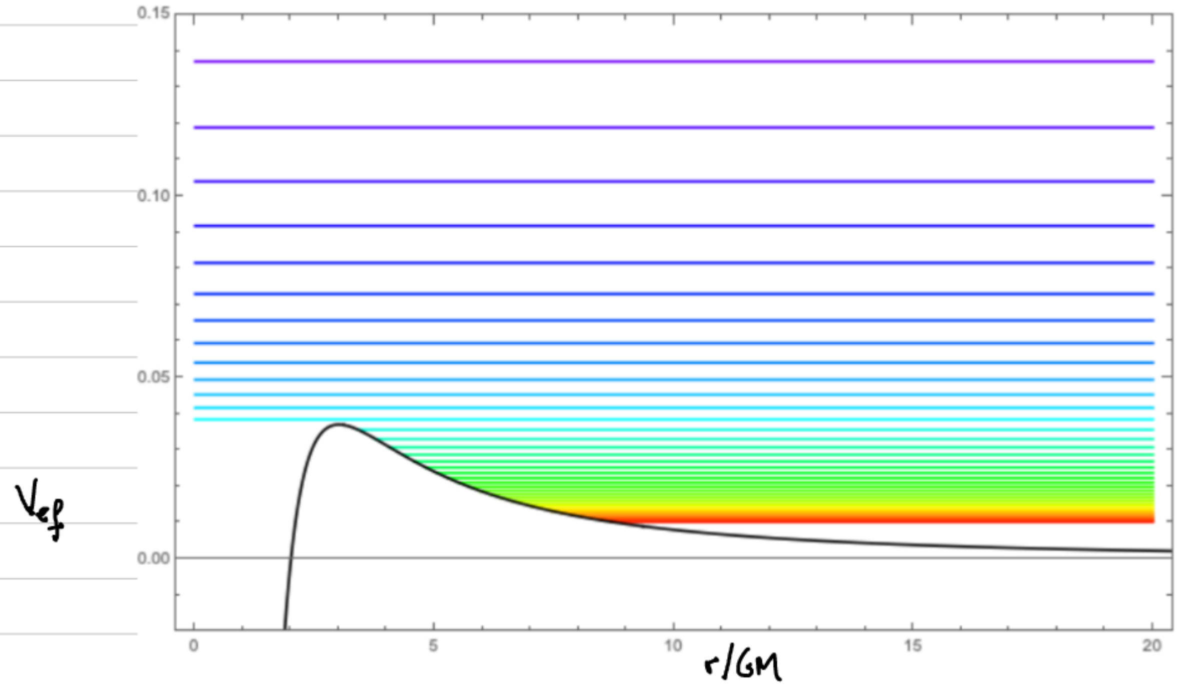
$$\ell := v_a\xi^a_{(\phi)} = v_\phi = r^2 v^\phi$$

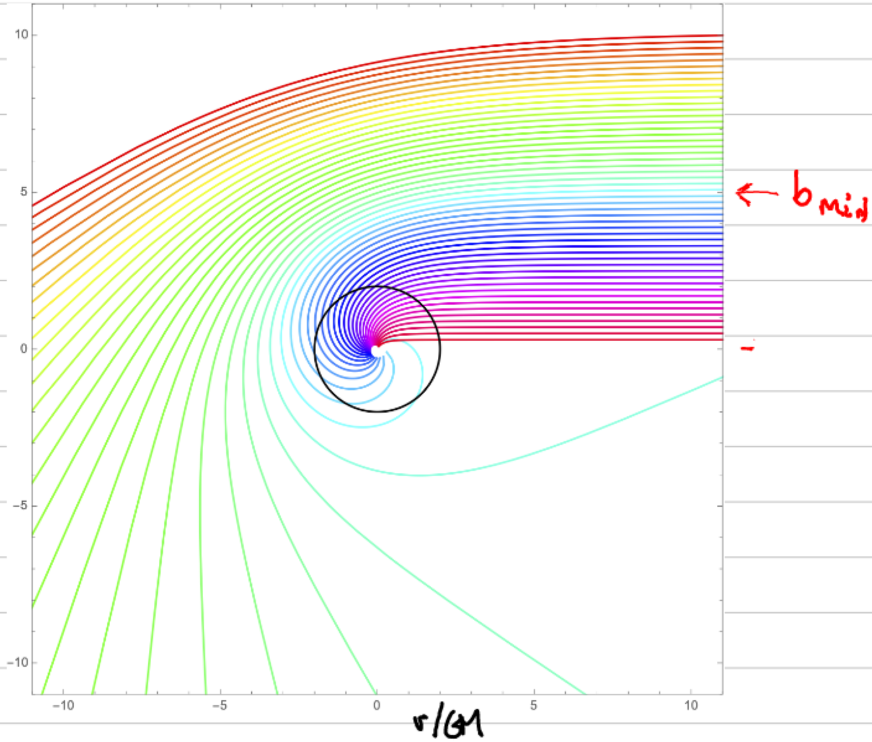
Assim:

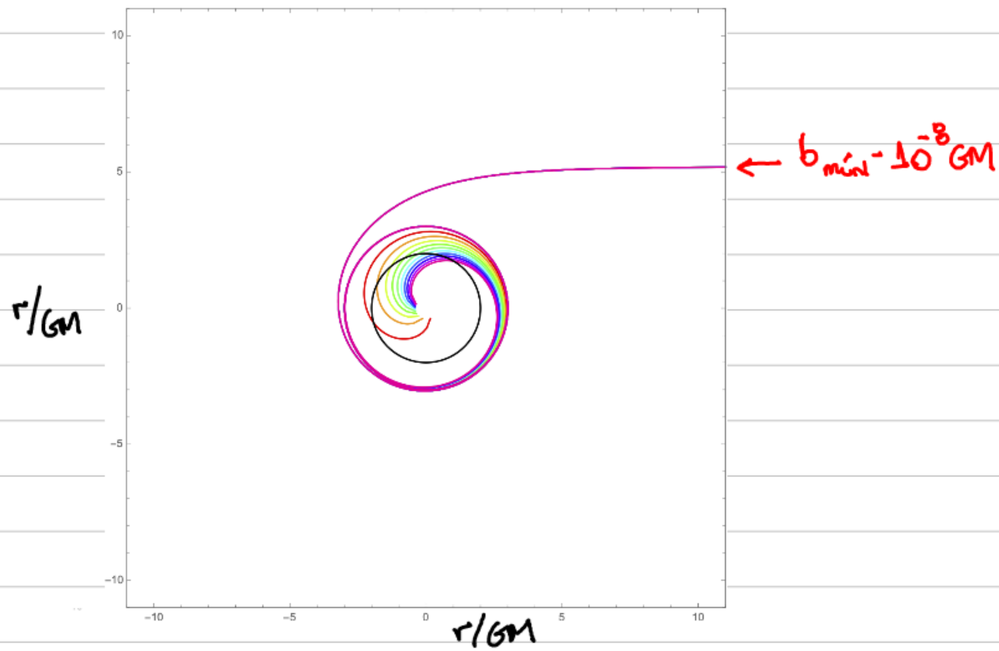
$$0 = -\frac{\epsilon^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + \frac{(v^r)^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} + \frac{\ell^2}{r^2} \Rightarrow (v^r)^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = \epsilon^2 \overset{\text{se } \ell\neq 0}{\Rightarrow}$$

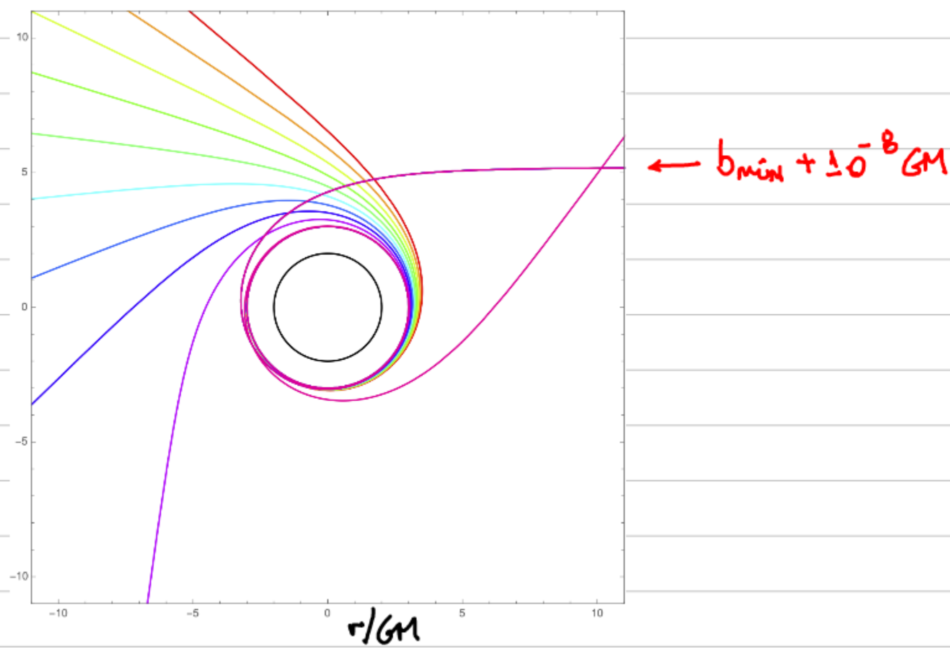
$$\Rightarrow \frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = \left(\frac{\epsilon}{\ell}\right)^2 \overset{\lambda\mapsto\lambda/\ell}{\Rightarrow} \boxed{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}_{V_{ef}(r)} = \left(\frac{\epsilon}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{b^2}}$$

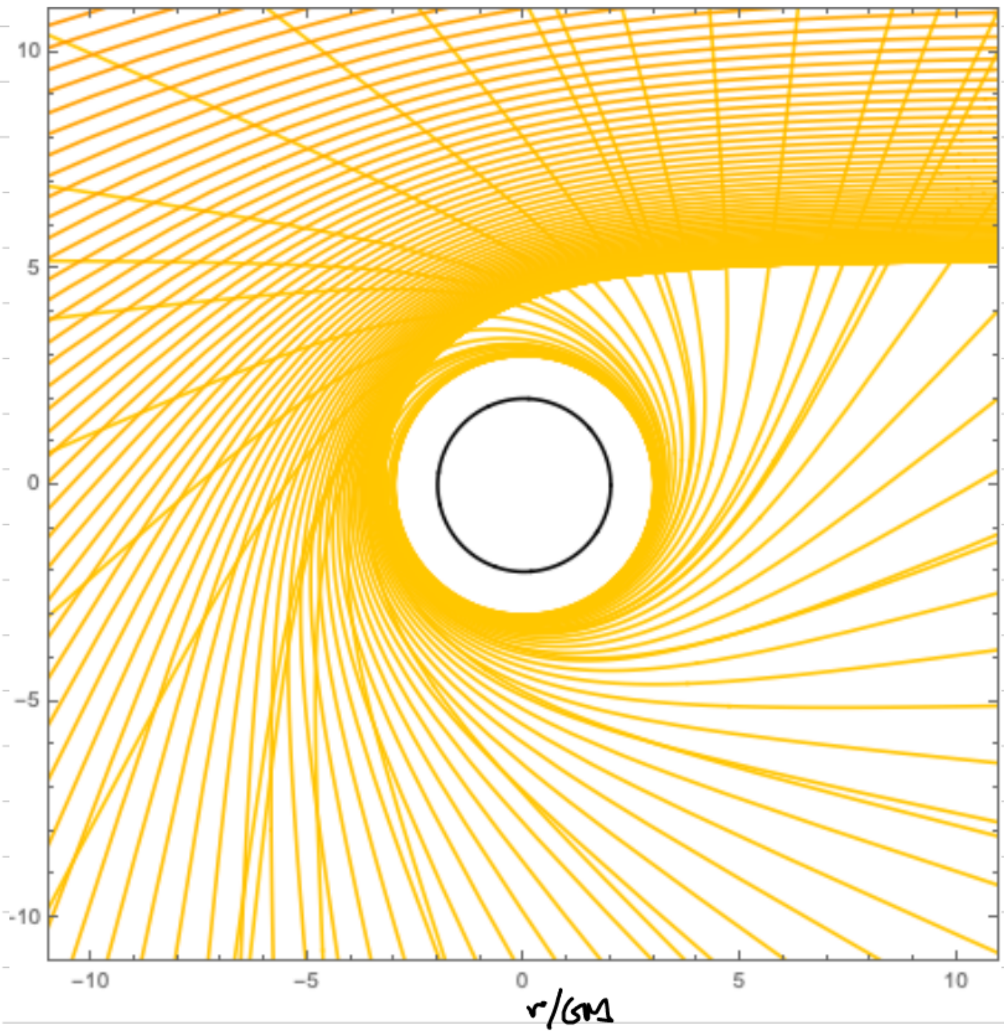
$$\boxed{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = \left(\frac{\epsilon}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{b^2}}$$

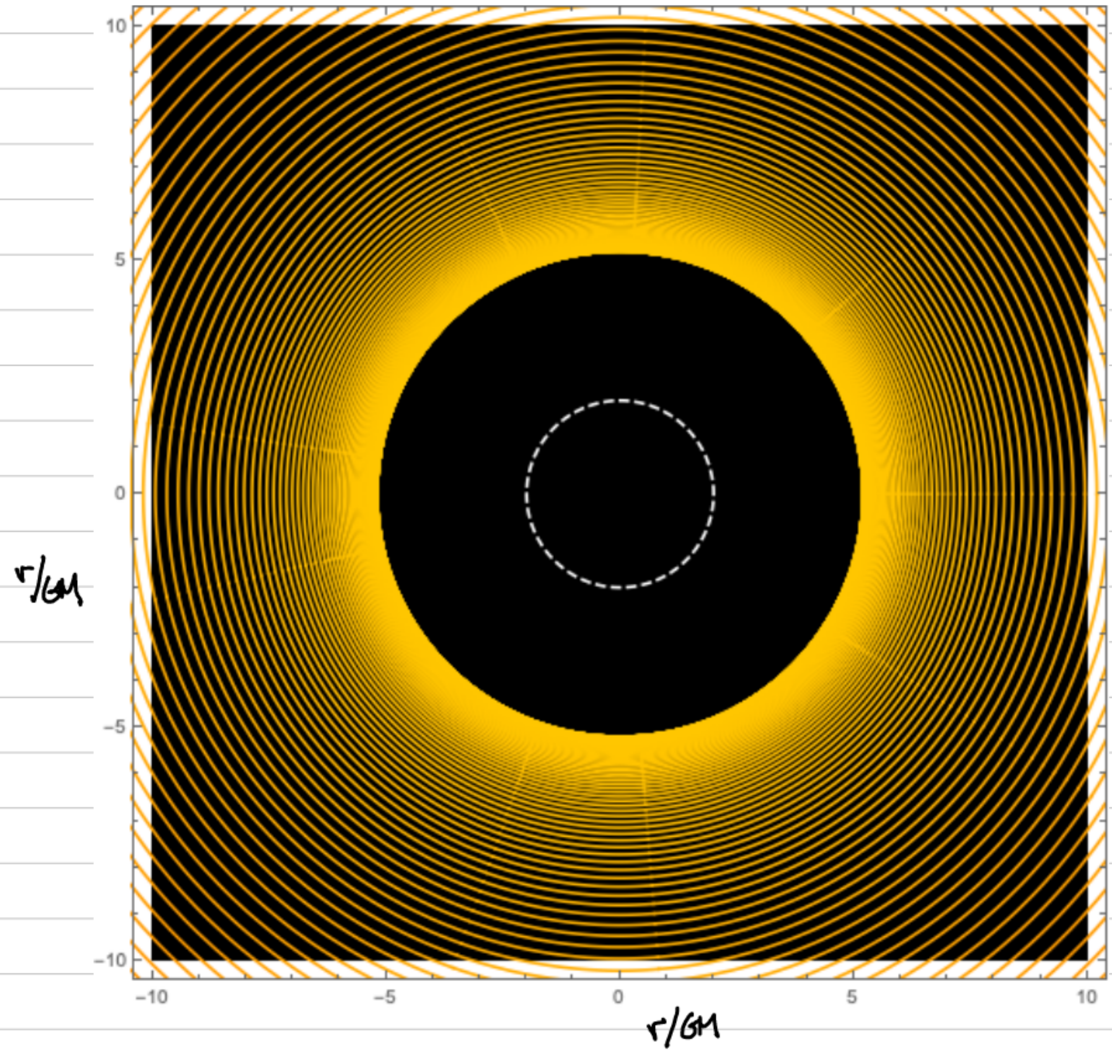












<u>Exercício</u>: Calcule o raio da órbita circular (instável) da luz.

<u>Exercício</u>: Calcule o raio da sombra mostrada na figura acima, no infinito.

<u>Exercício</u>: Calcule o ângulo de desvio de um raio de luz cujo raio de maior aproximação do objeto central é $d \gg GM$ (em ordem dominante em GM/d).