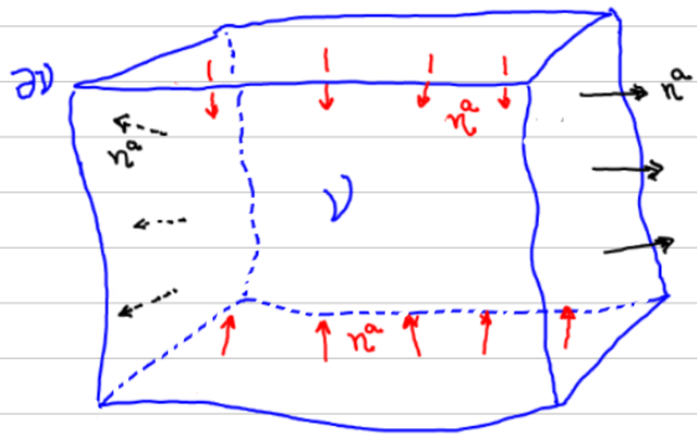
Quantidades conservadas e campos de Killing

Assim como acontece em mecânica usual, equações de continuidade estão relacionados a conservação de alguma quantidade integrada. Mais especificamente, um campo 4-vetorial j^a é dito representar uma "<u>corrente conservada</u>" se satisfizer a eq. de continuidade na forma covariante:

$$\boxed{\nabla_a j^a = 0}$$

A generalização do teorema de Gauss (Stokes) p/ dimensão arbitrária,

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\, \nabla_a j^a = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma_a j^a ,$$



onde $d\mathcal{V}$ é o elemento de volume físico 4-dimensional, $d\Sigma_a = d\Sigma\, n_a$ é o elemento de volume 3-dimensional orientado (p/ fora de $\mathcal{V}$ se n^a for tipo-espaço e p/ dentro de $\mathcal{V}$ se n^a for tipo-tempo, onde n^a é um 4-vetor normalizado e ortogonal a $d\Sigma$).

Escolhendo $\mathcal{V} = (t_1, t_2) \times \Sigma$, com Σ tipo-espaço, de modo que $\partial\mathcal{V} = \{(t_1,t_2)\times\partial\Sigma\} \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ($\Sigma_1 := \{t_1\}\times\Sigma$, $\Sigma_2 = \{t_2\}\times\Sigma$), temos

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma_a j^a = \int_{\Sigma_1} d\Sigma\, n_a j^a + \int_{\Sigma_2} d\Sigma\, n_a j^a + \int_{(t_1,t_2)\times\partial\Sigma} d\Sigma\, n_a j^a = \int_{\Sigma_1} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a + \int_{\Sigma_2} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{|h|}\, n_a j^a ,$$

onde $h = \det(h_{\mu\nu})$, $h_{ab} := g_{ab} - \frac{n_a n_b}{(n_c n^c)}$. Considerando que t_1 e t_2 são arbitrários e fazendo uso do teorema de Gauss, tem-se:

$$\int_{\Sigma_2} d^3x \sqrt{h}\,(-n_a) j^a - \int_{\Sigma_1} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{|h|}\,(n_a j^a) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g}\, \nabla_a j^a \iff$$

orientado p/ o futuro

$$\iff \left(\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{|h|}\,(n_a j^a) - \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{-g}\, \nabla_a j^a \right] \iff$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a \right) = \int_{\partial\Sigma_t} d^2x \sqrt{|h|}\, n_a j^a - \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{-g}\, \nabla_a j^a, \quad \Sigma_t := \{t\} \times \Sigma.$$

Logo, se $\nabla_a j^a = 0$ e $\partial\Sigma$ está suficientemente "longe" de modo que o fluxo de j^a através de $\partial\Sigma$ se anule, temos:

$$Q := \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a = \text{constante}.$$

Essa "carga" associada à corrente j^a é uma quantidade conservada (assumindo que não haja fluxo através da fronteira $\partial\Sigma$).

Exemplo: Uma das equações de Maxwell (em forma tensorial) é $\nabla_a F^{ab} \propto j^b$, onde j^a é a 4-densidade de corrente elétrica e F^{ab} é o tensor de Faraday — que é antissimétrico: $F^{ab} = -F^{ba}$. Devido à antissimetria de F^{ab} segue identicamente que $\nabla_b(\nabla_a F^{ab}) = 0$ (mostre isso), de onde segue, pela eq. de Maxwell acima, que $\nabla_a j^a = 0$. Com isso, pela manipulação anterior, segue que a quantidade

$$Q_e := \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a$$

é conservada $(dQ_e/dt = 0)$ — desde que o fluxo de j^a através de $\partial\Sigma$ seja nulo. Essa é a lei da conservação de carga elétrica, decorrente das eqs. de Maxwell.

Em resumo:

$$\boxed{\nabla_a j^a = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q := \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h}\, n_a j^a \ \text{conservado (sistema fechado)}}$$

- Tensor energia-momentum-estresse e isometrias

O tensor energia-momentum-estresse T_{ab} de um sistema isolado satisfaz a equação $\nabla_a T^{ab}=0$. Embora nos refiramos a essa eq. como de "conservação", deve-se ter em mente que ela não implica, sozinha, na existência de quantidades conservadas no sentido acima (ou seja, uma qtdade integrada Q tal que $dQ/dt=0$ ou $u^a\nabla_a Q=0$). Embora possa ser tentador tentar usar o teorema de Gauss acima p/ $\nabla_a T^{ab}$, levando a algo como:

$$"\int_V dV\, \nabla_a T^{ab} = \oint_{\partial V} d\Sigma_a T^{ab}", \qquad \text{(MAL DEFINIDO!)}$$

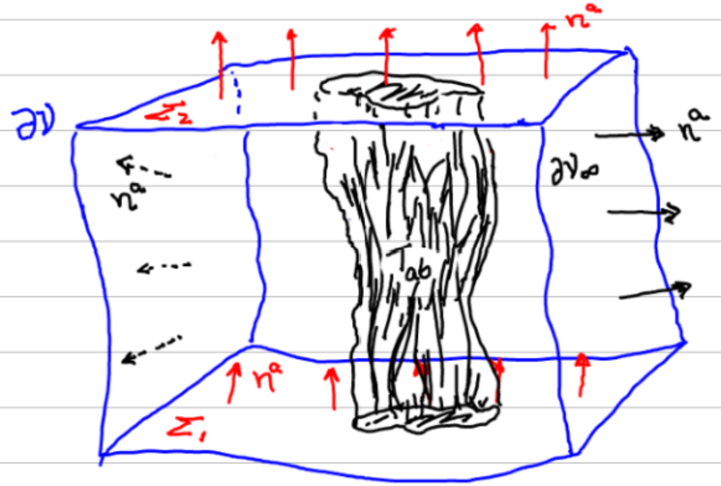
Note que cada lado dessa expressão nem sequer é bem definido, pois envolve a soma de 4-vetores ($\nabla_a T^{ab}$ e $n_a T^{ab}$) que "vivem" em eventos diferentes. Portanto, a não ser no caso trivial de espaço-tempo plano — onde tal soma pode ser feita — a conservação local $\nabla_a T^{ab}=0$ não necessariamente implica a existência de uma conservação global.

PORÉM... No caso do espaço-tempo admitir um campo de Killing ξ^a (ou seja, um campo 4-vetorial satisfazendo $2\nabla_{(a}\xi_{b)} := \nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a=0$), pode-se construir a 4-densidade de corrente

$$j^a := T^{ab}\xi_b$$

que satisfaz $\nabla_a j^a=0$ se $\nabla_a T^{ab}=0$.

$$\boxed{\text{Exercício: Mostre isso!}}$$



Com isso, cada campo de Killing ξ^a induz a seguinte quantidade conservada p/ um sistema isolado:

$$\boxed{Q_\xi := \int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\, T_{ab} n^a \xi^b}$$

<u>Exemplo</u>: <u>ENERGIA TOTAL</u>: Sendo T_{ab} um tensor energia-momentum-estresse e ξ^a um campo de Killing tipo-tempo e ortogonal a Σ (situação estática), temos

$$n^a = \frac{\xi^a}{|\xi^b\xi_b|^{1/2}}.$$

Assim, $T_{ab} n^a \xi^b = T_{ab} u^a u^b |\xi^c\xi_c|^{1/2} = |\xi^a\xi_a|^{1/2}\rho$, onde ρ é a densidade própria de energia medida por observadores com 4-velocidade $u^a = n^a$. Note, no entanto, que a quantidade conservada <u>NÃO</u> é a "soma" das energias medidas localmente,

$$E_p := \int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\,\rho = \int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\, T_{ab} n^a n^b, \qquad \text{(Energia própria)}$$

mas sim a energia "corrigida" pelo fator de red-shift $\sqrt{|\xi^a\xi_a|}$, que pode ser interpretada como a energia inferida pelo observador localizado onde ξ^a está normalizado (normalmente, no infinito):

$$E = \int_\Sigma d^3x\sqrt{h}\sqrt{|\xi^a\xi_a|}\,\rho.$$

→ Geodésicas e isometrias: Um caso particular de interesse do resultado acima se refere a partículas pontuais livres — portanto, seguindo geodésicas. O tensor energia-momentum-estresse de uma partícula com massa de repouso m e 4-velocidade $u^a(\tau)$ é dado por

$$T^{ab}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \, \frac{\delta^{(4)}(x^\alpha - x^\alpha(\tau))}{\sqrt{-g}} \, m \, u^a(\tau) \, u^b(\tau) \, ,$$

onde τ é o tempo-próprio da partícula e $x^\alpha(\tau)$ é a linha-de-mundo da mesma num sistema de coordenadas arbitrário. No entanto, nesse caso é mais fácil obtermos o resultado desejado simplesmente fazendo a manipulação à seguir:

Seja u^a uma geodésica (parametrizada pelo parâmetro afim — $u^a \nabla_a u^b = 0$) e seja ξ^a um campo de Killing qualquer. Então, definindo o escalar

$$q := (u^a \xi_a)$$

tem-se:

$$\frac{dq}{d\lambda} = u^a \nabla_a (u^b \xi_b) = \cancel{(u^a \nabla_a u^b)}^{\,0} \xi_b + u^a u^b \nabla_a \xi_b = u^a u^b \nabla_{(a} \xi_{b)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{q := (u^a \xi_a) = \text{constante ao longo de } \underline{\text{cada}} \text{ geodésica}}$$

EXERCÍCIO: Chegue ao mesmo resultado acima a partir da conservação da corrente $j^a = T^{ab}\xi_b$ p/ uma partícula pontual.