Exercício: Calcule as componentes do tensor de Einstein para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas acima

Exercício: Como um "check" de consistência dos resultados obtidos no exercício anterior, verifique a identidade de Bianchi

Resp:

$$G_{00} = \frac{f}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1-g^{-1}\right)\right]$$

$$G_{rr} = \frac{f'}{rf} - \frac{(g-1)}{r^2}$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{r^2}{2g}\left[\left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}\right)\left(\frac{f'}{2f}+\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\, G_{\theta\theta}$$

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu$$

- <u>Solução interior</u>

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

A condição de estaticidade impõe que observadores estáticos (i.e., aqueles com linha-de-mundo coincidindo com as órbitas da isometria temporal: $u^a \propto \xi^a_{(t)}$) medem fluxo de energia nulo em qualquer direção. Ou seja, sendo $\{u^a, e^a_j\}$ a tetrada associada a esses observadores, com $e^a_1 \propto \partial^a_r$, $e^a_2 \propto \partial^a_\theta$ e $e^a_3 \propto \partial^a_\phi$, tem-se $T_{ab} u^a e^b_j = 0$. Além disso, um elemento de área orientado perpendicularmente a e^a_r não pode sofrer cisalhamento em nenhuma de suas direções tangentes, pois isso quebraria a simetria esférica: $T_{ab} e^a_r e^b_\theta = T_{ab} e^a_r e^b_\phi = 0$. Ainda pela simetria esférica, a projeção de T_{ab} no subespaço tangente à esfera, tem que ser proporcional à própria métrica da esfera:

$$T_{ab}(e^a_\theta e_{\theta c} + e^a_\phi e_{\phi c})(e^b_\theta e_{\theta d} + e^b_\phi e_{\phi d}) \propto (e_{\theta c} e_{\theta d} + e_{\phi c} e_{\phi d}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T_{ab} e^a_\theta e^b_\theta) e_{\theta c} e_{\theta d} + (T_{ab} e^a_\theta e^b_\phi)(e_{\theta c} e_{\phi d} + e_{\theta d} e_{\phi c}) + (T_{ab} e^a_\phi e^b_\phi) e_{\phi c} e_{\phi d} \propto e_{\theta c} e_{\theta d} + e_{\phi c} e_{\phi d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{ab} e^a_\theta e^b_\theta = T_{ab} e^a_\phi e^b_\phi =: p_{\parallel} \\ T_{ab} e^a_\theta e^b_\phi = 0 \end{cases}$$

Logo, sendo $\rho := T_{ab} u^a u^b$ a densidade de energia medida <u>localmente</u> por esses observadores e $p_\perp := T_{ab} e^a_r e^b_r$ a pressão radial, temos:

$$T_{ab} e^a_\mu e^b_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix}$$

Calculando $\{u^a, e^a_\nu\}$ em termos de $\{\partial^a_\mu\}$:

$$g_{ab}u^a u^b = -1 \Leftrightarrow g_{ab}u^\mu \partial^a_\mu u^\nu \partial^b_\nu = -1 \Leftrightarrow g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 \Rightarrow g_{00}(u^0)^2 = -1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{f}} \Rightarrow u^\mu = \frac{\delta^\mu_0}{\sqrt{f}}$$

$$g_{ab}e^a_r e^b_r = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu}e^\mu_r e^\nu_r = 1 \Rightarrow g_{rr}(e_r)^r(e_r)^r = 1 \Rightarrow (e_r)^r = \frac{1}{\sqrt{g}} \Rightarrow (e_r)^\mu = \frac{\delta^\mu_r}{\sqrt{g}}$$

$$g_{ab}e^a_\theta e^b_\theta = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu}e^\mu_\theta e^\nu_\theta = 1 \Rightarrow g_{\theta\theta}e^\theta_\theta e^\theta_\theta = 1 \Rightarrow e^\theta_\theta = \frac{1}{r} \Rightarrow e^\mu_\theta = \frac{\delta^\mu_\theta}{r}$$

$$g_{ab}e^a_\phi e^b_\phi = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu}e^\mu_\phi e^\nu_\phi = 1 \Rightarrow g_{\phi\phi}e^\phi_\phi e^\phi_\phi = 1 \Rightarrow e^\phi_\phi = \frac{1}{r\sin\theta} \Rightarrow e^\mu_\phi = \frac{\delta^\mu_\phi}{r\sin\theta}$$

Assim, as componentes $T_{\mu\nu}$ são dadas por (mostre isso!):

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gp_\perp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 p_\parallel & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\, p_\parallel \end{pmatrix}}$$

Então, usando os componentes de G_{ab} nas coordenadas $\{(t, r, \theta, \varphi)\}$ calculadas no exercício da aula anterior, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r(1-g^{-1})\right] = 8\pi G\rho & \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{f'}{rgf} - \dfrac{(1-g^{-1})}{r^2} = 8\pi G\, p_\perp & \text{(II)} \\[2ex] \dfrac{1}{2g}\left[\left(\dfrac{f'}{f}\right)' + \left(\dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}\right)\left(\dfrac{f'}{2f} + \dfrac{1}{r}\right)\right] = 8\pi G\, p_\parallel & \text{(III)} \end{cases}$$

Exercício: Determine o vínculo imposto em ρ, $p_\perp$ e $p_\parallel$ devido à eq. $\nabla_a T^{ab} = 0$

Note que temos 3 equações independentes ((I) a (III) ou, por exemplo, (I), (II) e o vínculo do exercício acima) para 5 funções: $f, g, \rho, p_\perp, p_\parallel$. Disso vemos que temos que suplementar essas eqs. com duas "informações" adicionais. Há algumas maneiras p/ se fazer isso. Por exemplo, pode-se fornecer eqs. de estado da matéria relacionando $p_\perp$ e $p_\parallel$ com ρ; ou então tentar fixar à mão duas das funções ρ, $p_\perp$ e $p_\parallel$ e torcer p/ que as eqs. de Einstein levem a alguma solução. Exploraremos algumas dessas possibilidades mais adiante. Mas primeiro, vamos manipular as eqs. (I) a (III) na tentativa de resolvê-las:

(I): $\dfrac{d}{dr}\left[r(1-g^{-1})\right] = 8\pi G r^2 \rho \iff r(1-g^{-1}) = 8\pi G \displaystyle\int_0^r d\bar{r}\,\bar{r}^2 \rho =: 2G\,m(r)$, $\quad m(r) := 4\pi \displaystyle\int_0^r d\bar{r}\,\rho(\bar{r})\,\bar{r}^2$

$$\Rightarrow \boxed{g(r) = \left[1 - \frac{2G\,m(r)}{r}\right]^{-1}}$$

(g e ρ estão intimamente relacionados)

Embora pareça ser uma massa, tem-se que ser mais cuidadoso com sua interpretação.

(II): Substituindo $g(r)$ em (II), temos:

$f = e^{2\Phi}$

$$\frac{f'}{f} = \left[8\pi G p_\perp + \frac{2G\,m(r)}{r^3}\right] r \left[1 - \frac{2G\,m(r)}{r}\right] \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G\left[4\pi p_\perp r^3 + m(r)\right]}{r^2\left[1 - \frac{2G\,m(r)}{r}\right]}}$$

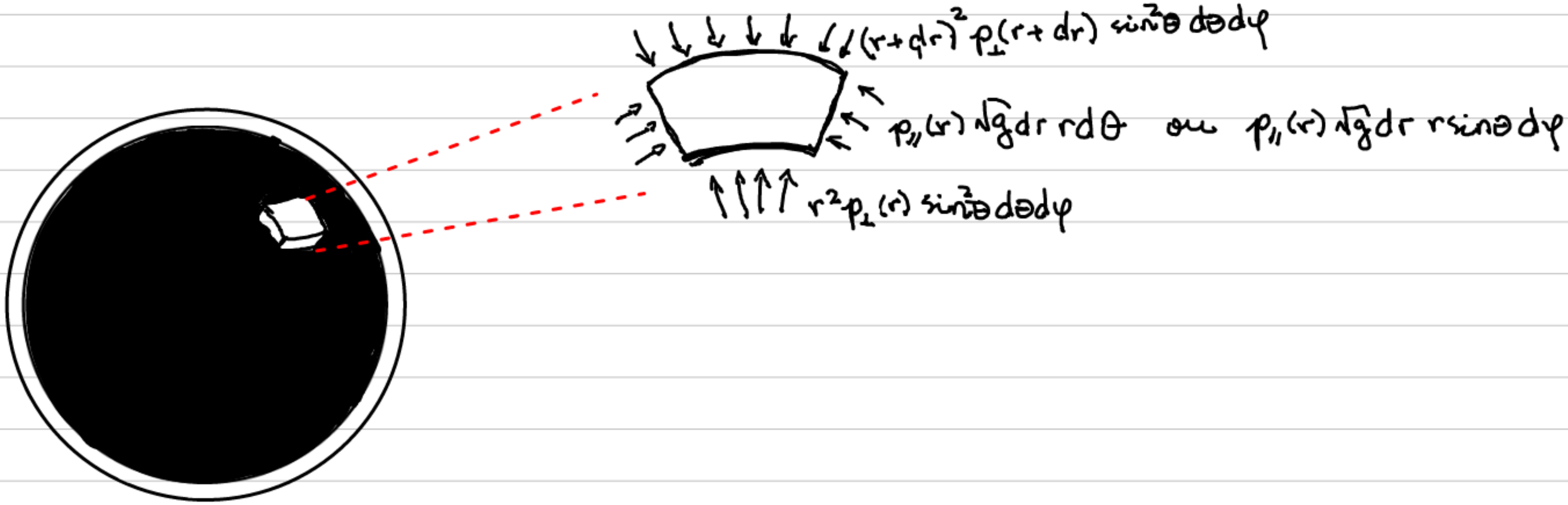
(Φ é relacionado ao potencial Newtoniano no regime de campo fraco. Note que não apenas ρ mas $p_\perp$ também é fonte de gravidade.)

Ao invés de (III), usando o vínculo imposto por $\nabla_a T^{ab}=0$ (vide exercício anterior), temos:

$$\frac{dp_\perp}{dr} + (\rho+p_\perp)\frac{d\Phi}{dr} + \frac{2}{r}(p_\perp - p_\parallel) = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{\underbrace{-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 p_\perp)}_{\text{sustentação radial devida ao gradiente da pressão}} + \underbrace{\frac{2p_\parallel}{r}}_{\text{sustentação radial devida à pressão angular}} = \underbrace{(\rho+p_\perp)\frac{d\Phi}{dr}}_{\text{"peso" do elemento de fluido}}}$$

(Eq. de equilíbrio hidrostático)



→ Fluido perfeito: $p_\perp = p_{\parallel} =: p$

Nesse caso, temos:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2,$$

com

$$m(r) := 4\pi \int_0^r d\bar{r}\, \bar{r}^2 \rho(\bar{r})$$

$$\boxed{\frac{dp}{dr}} = -(\rho + p)\frac{d\Phi}{dr} = \boxed{\frac{-G(\rho+p)\left[m(r) + 4\pi r^3 p\right]}{r^2\left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]}}$$

Eq. de Tolman-Oppenheimer-Volkof (T.O.V.)
do equilíbrio hidrostático (p/ fluido perfeito)

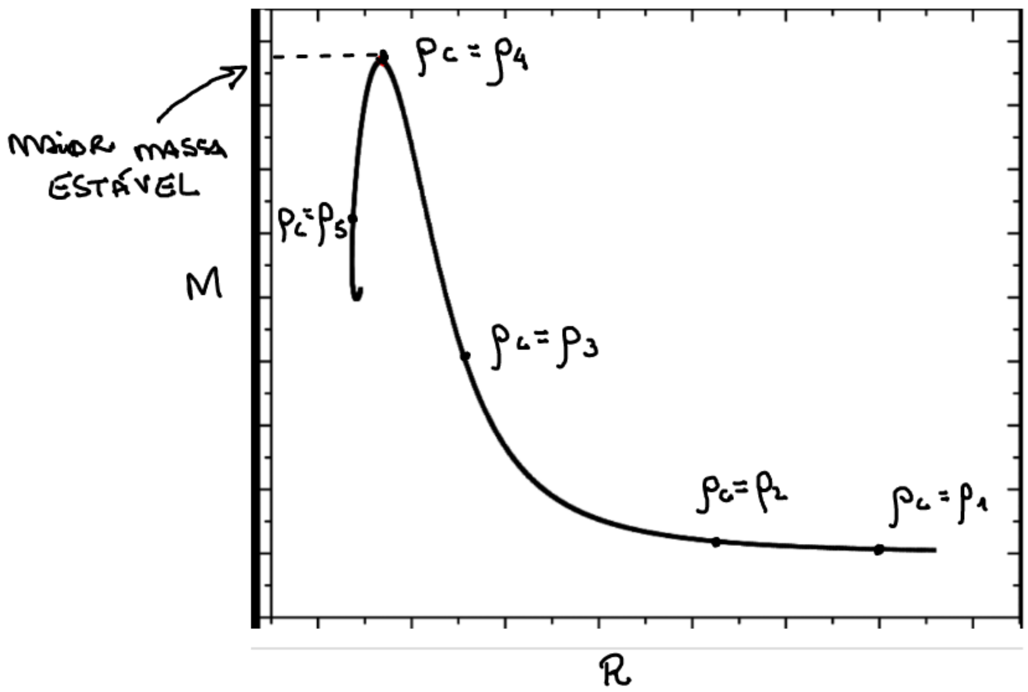
<u>Roteiro p/ se resolver essas equações</u>:

1- Dada uma equação de estado, $p = p(\rho)$, resolve-se concomitantemente as Eqs. $m(r)$ e T.O.V. para $p(r)$ e $\rho(r)$, integrando-as desde $r = 0$ (onde $\rho = \rho_0$ e $p = p_0 = p(\rho_0)$) até o valor de r para o qual $p = 0$: $r = R \Leftrightarrow p(R) = 0$. Esse valor $r = R$ determina o raio do objeto (que dependerá da condição central $\rho = \rho_0$);

2- A partir de $m(r)$ calculado acima, p/ $0 \leq r \leq R$, calcula-se a "massa" do objeto por $M = m(R)$;

3- Sabendo $\rho(r)$ e $p(r)$, calcula-se $\Phi(r)$.

Note que, desse modo, M e R do objeto são funções da densidade central ρ_0:
$R = R(\rho_0)$, $M = M(\rho_0)$.



ρ_c = densidade central

$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4 < \rho_5$

Roteiro alternativo: Substituir 1 e 2 acima por

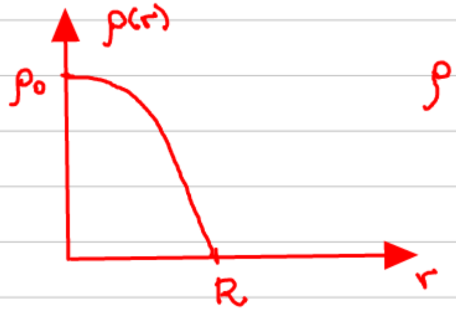
1' - Dá-se, "à mão", a distribuição $\rho = \rho(r)$, no intervalo $0 \leq r \leq R$ desejado (R é dado). Com isso, calcula-se $m(r)$ p/ $0 \leq r \leq R$, de onde sai a massa $M = m(R)$;

2' - Resolve-se T.O.V. p/ $p(r)$ de fora p/ dentro, com a condição "inicial" p/ $p(r)$ sendo $p(R) = 0$. Se existir solução $p(r)$ (finita) para todo valor $0 \leq r \leq R$, então $\rho(r)$ dado e $p(r)$ encontrado constituem uma configuração possível p/ o objeto;

3 - ... (vide roteiro anterior)

Exercício: Resolva a eq. de T.O.V. p/ um objeto com densidade uniforme, massa M e raio R, encontrando o valor da pressão central p_0. Em seguida, determine o maior valor possível p/ $\frac{GM}{R}$ desse objeto.

Exercício: Refaça o exercício anterior mas agora p/ um objeto com perfil parabólico de densidade:



$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad 0 \leq r \leq R$$