Gravidade linearizada

Agora que temos uma proposta p/ equação exata p/ descrever como matéria-energia deforma a geometria do espaço-tempo, podemos analisar seu regime linear completo.

Suponha que o espaço-tempo seja tal que exista um sistema de coordenadas $\{(t, x^i)\}$ no qual as componentes da métrica são

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 .$$

Antes de prosseguir, notemos que se fizermos uma mudança de coordenadas $\{(t, x^i)\} \mapsto \{(t', x'^i)\}$

$$x'^\mu = x'^\mu(x) = x^\mu + \xi^\mu(x) \Rightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu ,$$

com $|\partial_\alpha \xi^\mu| \ll 1$, então, nessas novas coordenadas, o <u>mesmo</u> tensor métrico possui componentes $g'_{\mu\nu}(x')$ satisfazendo:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}(x') = (\delta^\mu_\alpha + \partial_\alpha \xi^\mu)(\delta^\nu_\beta + \partial_\beta \xi^\nu) g'_{\mu\nu}(x') =$$

$$= g'_{\alpha\beta}(x') + g'_{\alpha\nu}(x') \partial_\beta \xi^\nu(x) + g'_{\mu\beta}(x') \partial_\alpha \xi^\mu(x) + O((\partial\xi)^2) .$$

Escrevendo $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ e $g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x')$, temos, até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e $\partial_\alpha \xi^\beta$:

$$h_{\alpha\beta}(x) = h'_{\alpha\beta}(x') + \partial_\beta \xi_\alpha(x) + \partial_\alpha \xi_\beta(x) + O(h^2, h\partial\xi, (\partial\xi)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h'_{\alpha\beta}(x') = h_{\alpha\beta}(x) - \partial_\alpha \xi_\beta(x) - \partial_\beta \xi_\alpha(x) + O(h^2, h\partial\xi, (\partial\xi)^2)} , \quad \xi_\alpha(x) = \eta_{\alpha\beta} \xi^\beta(x)$$

- <u>Liberdade de "gauge"</u>

A expressão acima mostra que perturbações à métrica de Minkowski que diferem por $\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha$, com $|\partial_\alpha \xi_\beta| \ll 1$, representam a mesma perturbação <u>física</u> (em 1ª ordem de perturbação). Isso é análogo (mas não idêntico) ao que acontece em eletromagnetismo com o 4-vetor potencial A_μ, que pode ser modificado pela adição de um gradiente de uma função qualquer, $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$, e representar o mesmo campo eletromagnético físico.

Essa liberdade de "calibre" pode ser usada p/ simplificar as equações que regem a perturbação do espaço-tempo.

$$\to R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + O(h^2) = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\alpha(\partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) - \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\mu(\partial_\nu h_{\alpha\beta}) + O(h^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_\alpha h_\nu{}^\alpha) + \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\alpha h_\mu{}^\alpha) + O(h^2)$$

$$\to R = -\frac{1}{2}\Box h - \frac{1}{2}\Box h + \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} = -\Box h + \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + O(h^2)$$

$$\to G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_\alpha h_\nu{}^\alpha) + \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\alpha h_\mu{}^\alpha) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + O(h^2)$$

Definamos a combinação $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ $(\Rightarrow \bar{h} = -h) \Leftrightarrow h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$:

$$\to G_{\mu\nu} = -\frac{\Box}{2}\bar{h}_{\mu\nu} + \cancel{\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\Box\bar{h}} + \frac{1}{2}\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\bar{h}} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\alpha\left(\bar{h}_\nu{}^\alpha - \cancel{\frac{1}{2}\delta_\nu^\alpha\bar{h}}\right) + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\alpha\left(\bar{h}_\mu{}^\alpha - \cancel{\frac{1}{2}\delta_\mu^\alpha\bar{h}}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\bar{h}}$$

$$-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta} + \cancel{\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\Box\bar{h}} + O(\bar{h}^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha\bar{h}^\alpha_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha\bar{h}^\alpha_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}) + O(\bar{h}^2)$$

Logo, vemos que *se* pudermos escolher um "calibre" no qual $\partial_\alpha \bar{h}^\alpha_\mu = 0$, a expressão p/ $G_{\mu\nu}$ se simplificará enormemente.

- Gauge transverso:

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \Rightarrow h \mapsto h' = h - 2\partial_\mu \xi^\mu \Rightarrow$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} \mapsto \partial'_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h\partial\xi) = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \Box \xi^\alpha - \partial^\alpha(\cancel{\partial_\beta \xi^\beta}) + \partial^\alpha(\cancel{\partial_\beta \xi^\beta}) + \mathcal{O}(h\partial\xi)$$

$$= \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \Box \xi^\alpha + \mathcal{O}(h\partial\xi)$$

Portanto, caso $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}$ não seja nulo, podemos fazer uma mudança de coordenadas $\{x^\mu\} \mapsto \{x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu\}$, com $\Box \xi^\alpha = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}$, de modo que, nas novas coordenadas, $\partial'_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0$. Assim, suporemos que já estamos num sistema de coordenadas desses (suprimindo as '), de modo que

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box \bar{h}_{\mu\nu} \quad , \text{com } \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$$

Logo, nesse "gauge", as Eqs de Einstein linearizadas são:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box \bar{h}_{\mu\nu} &= -16\pi G T_{\mu\nu} \\ \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}} \iff \boxed{\begin{aligned} \Box h_{\mu\nu} &= -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T\right) \\ \partial_\mu h^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial^\nu h \end{aligned}}$$

Exercício: Argumente que numa região de vácuo ($T_{\mu\nu}=0$), é possível fazer uso da liberdade de "gauge" residual — ou seja, uma nova mudança de coordenadas, $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, com $\Box \xi^\mu = 0$ — para escolher um "gauge" no qual $h = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$.

- ## Gravitomagnetismo

Note que as equações que $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisfaz são análogas às que o 4-potencial A_μ satisfaz em eletromagnetismo, no "gauge" de Lorentz: $\Box A_\mu = -j_\mu$, $\partial_\mu A^\mu = 0$. Além disso, considerando que, nessas coordenadas, matéria não-relativística satisfaz

$$|T_{00}| \sim \rho \gg \rho v^j \sim |T_{0j}| \gg \rho v^j v^k \sim |T_{jk}| ,$$

podemos considerar que a primeira correção à gravitação Newtoniana advinda de movimentos da fonte é tal que

densidade de momentum $\sim \rho v_j$ $\quad (\pi_j = -T_{0j})$

$$\left.\begin{array}{l} \Box \bar{h}_{00} \simeq -16\pi G\rho \;, \quad \Box \bar{h}_{0j} \simeq 16\pi G \pi_j \;, \quad \Box \bar{h}_{ij} \simeq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{cond. iniciais} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e contorno} \end{array}\right\} \bar{h}_{ij} \simeq 0 \;\left(\Rightarrow h_{ij} = \eta_{ij} h_{oo} = \eta_{ij} \frac{\bar{h}_{oo}}{2}\right)$$

$$0 = \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = \partial_0 \bar{h}^{0\nu} + \partial_j \bar{h}^{j\nu} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 \bar{h}^{0j} = -\partial_k \bar{h}^{kj} \simeq 0 \\ \partial_0 \bar{h}^{00} = -\partial_j \bar{h}^{j0} = \partial_j h_0{}^j \end{cases}$$

Resta, então, analizar o efeito desses termos sobre o movimento de uma partícula teste. Para isso, voltemos p/ a eq. da geodésica:

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} u^\mu u^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} u^\mu u^\alpha = 0$$, lembrando que $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = u^0(1, \vec{v})$

A condição de normalização nos fornece:

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (\eta_{00} + h_{00})(u^0)^2 + 2h_{0j} u^0 u^j + O(v^2) = (u^0)^2\left[-1 + h_{00} + 2h_{0j} v^j + O(v^2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^0 = 1 + \frac{h_{00}}{2} + h_{0j} v^j + O(v^2, h^2) = 1 + \frac{\bar{h}_{00}}{4} + \bar{h}_{0j} v^j + O(v^2, h^2)$$

Como a Eq. da geodésica implica na conservação de $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, podemos considerar apenas suas componentes espaciais (pois a temporal seguirá dessa junta a expressão p/ u^0 dada acima):

$$0 = \frac{du^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^0 \frac{d}{dt}\left(u^0 v^j\right) + \Gamma^j_{00}(u^0)^2 + 2\Gamma^j_{0k} u^0 u^k + O(v^2, h^2) =$$

$$= u^0\left[\frac{d}{dt}(u^0 v^j) + \frac{1}{2}u^0(2\partial_0 h_0^j - \partial^j h_{00}) + u^0 v^k(\partial_0 h_k^j + \partial_k h_0^j - \partial^j h_{0k}) + O(v^2, h^2)\right] =$$

$$= u^0\left[\frac{d}{dt}(u^0 v^j) - \frac{1}{4}\partial^j \bar{h}_{00} + u^0 v^k(\delta^j_k \partial_0 \bar{h}_{00}/2 + \partial_k \bar{h}_0^j - \partial^j \bar{h}_{0k}) + O(v^2, h^2)\right]$$

$$= u^0\left[\frac{d(u^0 v^j)}{dt} + \frac{v^j \partial_0 \bar{h}_{00}}{2} - \frac{1}{4}\partial^j \bar{h}_{00} + v^k(\partial_k \bar{h}_0^j - \partial^j \bar{h}_{0k}) + O(v^2, h^2)\right]$$

Logo, desconsiderando variações temporais do campo frente a suas variações espaciais (campo estacionário), temos:

$$\frac{dv^j}{dt} \simeq \frac{1}{4}\partial^j \bar{h}_{00} + v^k(\partial^j \bar{h}_{0k} - \partial_k \bar{h}_0^j)$$

Como já havíamos visto, p/ $v^k = 0$ recaímos em gravitação Newtoniana:

$$\frac{dv^i}{dt} = \partial^i\left(\frac{\bar{h}_{00}}{4}\right), \quad \Box\left(\frac{\bar{h}_{00}}{4}\right) = -4\pi G\rho \xrightarrow[\text{estacionário}]{\text{campo}} \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left[-\vec{\nabla}\left(\frac{\bar{h}_{00}}{4}\right)\right]}_{\vec{E}_g} = 4\pi G\rho$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{E}_g \longleftarrow \vec{E}_g$$

componente temporal da Eq.

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{E}_g - 4\,\vec{v}\times\vec{B}_g}$$

$$\vec{E}_g = -\vec{\nabla}A_g^0, \quad \vec{B}_g = \vec{\nabla}\times\vec{A}_g$$

$$A_g^\mu = -\frac{\bar{h}_0{}^\mu}{4}$$

$$\Box\left(\frac{\bar{h}_0{}^\mu}{4}\right) = -4\pi G T_0{}^\mu = 4\pi G(\rho, \vec{\pi})$$

Analogia eletromagnetismo:

$$\left.\begin{aligned} A_g^\mu &= -\frac{\bar{h}_0{}^\mu}{4} \\ j_g^\mu &= 4\pi G(\rho, \vec{\pi}) \end{aligned}\right\} \longleftarrow \begin{aligned} \Box A^\mu &= -j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned}$$

<u>Exercício</u>: Certifique-se que você consegue fazer todas as passagens que levam na Eq. de força "tipo-Lorentz" acima