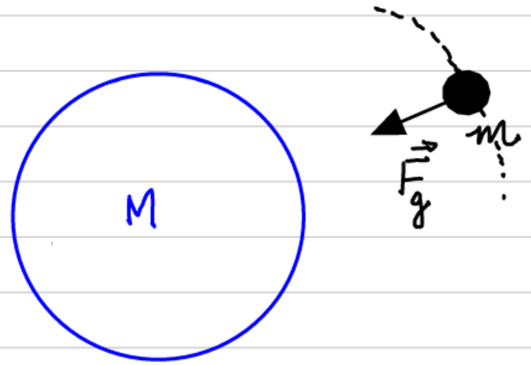
Equações de Einstein

• Gravitação Newtoniana



– Gravitação universal (fonte esfericamente simétrica):

$$\vec F_g = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat r = -m\vec\nabla\phi\,, \quad \phi = -\frac{GM}{r}$$

– 2ª Lei de Newton:

$$-m\vec\nabla\phi = m\vec a \Leftrightarrow \boxed{\vec a = -\vec\nabla\phi}$$

(Como gravidade influencia matéria)

onde o potencial gravitacional ϕ satisfaz a equação local

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho}\,,$$

(como matéria "gera" gravidade)

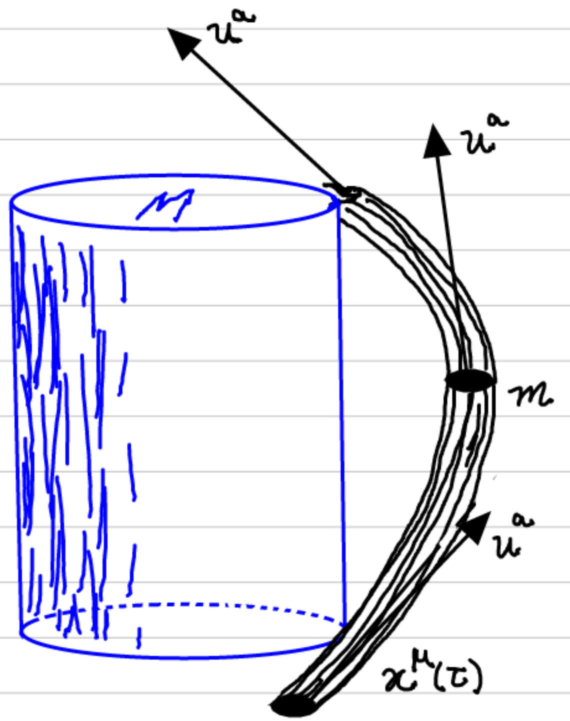
com ρ sendo a densidade de massa da "fonte".

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Exercício: Certifique-se que você compreende que o caminho que liga esta}\\ \text{última equação à solução de } \phi \text{ de uma fonte esférica dada acima.}\\ \text{(Sugestão: Faça analogia com as formas local e integral da Lei de}\\ \text{Gauss do eletromagnetismo.)}\end{array}}$$

No espírito do princípio de equivalência, a eq. de movimento $\vec a = -\vec\nabla\phi$ deve ser relacionada com a equação da geodésica:

$$u^a \nabla_a u^b = 0 \iff \left.\begin{array}{l} u^\mu (\partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} u^\lambda) = 0 \\ u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} u^\mu u^\lambda = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\mu\lambda} u^\mu u^\lambda = 0 \\ \dfrac{du^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\mu\lambda} u^\mu u^\lambda = 0 \end{cases}$$



Para seguir adiante, consideremos que a gravitação de Newton deve ser válida como uma aproximação quando:

(i) Pequenos desvios do espaço-tempo de Minkowski:

$$\exists \{x^\mu = (t, x, y, z)\} \;/\; g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \text{ com } \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \text{ e } |h_{\mu\nu}| \ll 1;$$

(ii) Variações temporais do campo são desprezáveis frente a variações espaciais:

$$|\partial_t h_{\mu\nu}| \ll |\partial_j h_{\mu\nu}|$$

(iii) Regime não-relativístico de velocidades da partícula teste:

$$|v^j| := \left|\frac{dx^j}{dt}\right| \ll 1 \quad (c = 1)$$

Logo, a condição de normalização de u^a fornece:

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \simeq (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu = \eta_{00}(u^0)^2 + \mathcal{O}(hv, v^2) \Rightarrow u^0 = 1 + \frac{h_{00}}{2} + \mathcal{O}(hv, v^2)$$

Já os símbolos de Christoffel associados a esse regime são:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\eta^{\mu\nu}}{2}(\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(h^2).$$

Então, em ordem dominante, a eq. da geodésica leva a:

$$0 = \frac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} h_{00} + \Gamma^0_{00}(u^0)^2 + \mathcal{O}(hv) = \frac{1}{2}\partial_0 h_{00} + \frac{\eta^{00}}{2}\partial_0 h_{00} + \mathcal{O}(hv) \Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

$$0 = \frac{du^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^0 \frac{d}{dt} v^j + \Gamma^j_{00}(u^0)^2 + \mathcal{O}(hv, v^2) = \frac{dv^j}{dt} - \frac{\eta^{jk}}{2}(\partial_j h_{00}) + \mathcal{O}(hv, v^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{1}{2}\vec{\nabla} h_{00}}$$

Dessas equações vemos que no regime de baixas velocidades, pequenas curvaturas e campo estático, recuperamos gravitação Newtoniana se

$$\boxed{h_{00} \simeq -2\phi} \quad \text{e} \quad \boxed{\nabla^2 h_{00} \simeq -8\pi G\rho}$$

Portanto, devemos procurar por uma equação tensorial p/ a métrica do espaço-tempo que nesse regime de campo fraco não-relativístico recaia em $\nabla^2 h_{00} = -8\pi G\rho$.

• Descrição relativística da matéria

A primeira pista na busca pela equação dinâmica p/ a geometria do espaço-tempo, que no regime descrito acima deve recair em $\nabla^2 h_{00} = -8\pi G\rho$, vem do lado direito dessa equação: a densidade de massa ρ. Desde a Relatividade Restrita sabia-se que massa e energia são conceitos equivalentes; logo, num contexto relativístico, ρ deve representar a densidade de qualquer forma de energia. Além disso, sabia-se que ρ, por si só, embora fosse uma função (não possui componentes), seu valor <u>não</u> é independente de referencial; logo não pode ser um legítimo escalar. E, de fato, a formulação relativística das leis Newtonianas de conservação de massa e a 2ª lei na forma local nos leva a associar ρ à componente tempo-tempo de um tensor simétrico de posto (0,2) denominado "tensor energia-momentum-estresse" T_{ab}:

Leis Newtonianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{(Conservação de massa)}$$

$$\frac{\partial (\rho v^j)}{\partial t} + \partial_k(\rho v^j v^k + T^{jk}) = f^j \quad \text{(2ª Lei de Newton local)}$$

onde
- ρ: densidade de massa
- v^j: campo de velocidade
- T^{jk}: tensor de estresse
- f^j: densidade de força externa

Lei relativística

$$\nabla_a T^{ab} = f^b \qquad (T^{ab} = g^{ac} g^{bd} T_{cd})$$

onde se u^a é a 4-velocidade de um observador, então

$$\rho = T_{ab} u^a u^b$$

Logo, o lado direito da equação que governa h_{00} pode ser escrita como:

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{ab} u^a u^b = -8\pi G T_{00},$$

onde na última passagem usamos que u^a é a 4-velocidade dos observadores parados no sistema de coordenadas adotado (que são quem mede ρ como sendo a densidade de massa-energia).

Em resumo, a discussão acima sugere que estamos procurando por uma equação tensorial cuja componente 0-0 seja dada pela equação acima:

Envolve 2as derivadas parciais da métrica

$$\begin{array}{ccc} ? & = & -8\pi G T_{ab} \\ \text{comp. 0-0} \downarrow & & \downarrow \text{comp. 0-0} \\ \nabla^2 h_{00} & = & -8\pi G T_{00} \end{array}$$

- <u>"Pequenas" curvaturas</u>

A discussão acima sugere que devemos procurar por um tensor simétrico, de posto (0,2), que dependa de derivadas parciais da métrica até segunda ordem. O candidato mais óbvio é o tensor de Ricci. Para pequenos desvios do espaço-tempo de Minkowski, tem-se:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\alpha\left(\cancel{\partial_\mu h_{\nu\beta}} + \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}\right) - \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\mu\left(\cancel{\partial_\alpha h_{\nu\beta}} + \partial_\nu h_{\beta\alpha} - \partial_\beta h_{\alpha\nu}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\left(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\beta\mu}\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\beta\nu}\right)$$

Portanto, em ordem <u>dominante</u>, temos:

$$R_{00} \simeq -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$$

Assim, numa 1ª tentativa, pareceria razoável propor a equação

$$R_{ab} = 4\pi G\, T_{ab}$$

como equação que rege a influência da matéria (e energia, estresses, ...) sobre a geometria do espaço-tempo. E, de fato, a primeira proposta de Einstein p/ a eq. da Relatividade Geral foi esta. Demorou algum tempo para se perceber que essa proposta sofria de alguns problemas

- <u>Identidade de Bianchi e as Equações de Einstein</u>

A equação proposta acima sofre do seguinte problema. O tensor energia-momentum-estresse T_{ab} que afeta o espaço-tempo deve conter a contribuição de todas as formas de energia presentes em cada evento. Por isso, T_{ab} do lado direito da equação proposta deve satisfazer $\nabla_a T^{ab} = 0$ (já que no contexto do princípio de equivalência, não há "força gravitacional"). Logo, a equação proposta implicaria que $\nabla_a R^{ab} = 0$.

Por outro lado, a identidade de Bianchi satisfeita pelo tensor de Riemann implica que

$$\nabla_a R^{ab} = \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a R \, .$$

Sendo assim, a equação proposta implicaria que $\nabla_a R = 0 \Leftrightarrow R = \text{cte}$, o que levaria a $R=0$ se considerarmos que há regiões de vácuo ($T_{ab}=0 \Rightarrow R_{ab}=0 \Rightarrow R=0$). Com isso, apenas espaços-tempos com $R=$ constante seriam permitidos pela teoria, o que implicaria que $g^{ab}T_{ab}=(4\pi G)^{-1}R=0$. Mas $g^{ab}T_{ab}=0$ é uma condição muito restritiva p/ o tensor energia-momentum-estresse de matéria ou mesmo campos. Por exemplo, um gás de partículas não interagentes e tem $g^{ab}T_{ab}=-\rho+3p \simeq -\rho \neq 0$, pois p/ gases não relativísticos a pressão do mesmo (p) é desprezível frente a sua densidade de energia (incluindo massa).

Felizmente, ao mesmo tempo que a identidade de Bianchi veio eliminar a equação proposta anteriormente, ela também vem trazer qual o candidato natural para p/ substituir R_{ab} na nossa proposta. Como queremos que o lado direito satisfaça $\nabla_a T^{ab}=0$, basta manipular a identidade de Bianchi,

$$\nabla_a R^{ab}=\frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a R \iff \nabla_a\left(R^{ab}-\frac{1}{2}g^{ab}R\right)=0 ,$$

para vermos que $G_{ab}:=R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R$ é o candidato natural p/ ser usado no lado esquerdo da nossa eq.

$$R_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}R=\kappa T_{ab} ,$$

onde κ é uma constante numérica a ser determinada, mais uma vez, pelo regime de campo fraco. A componente 0-0 dessa equação nos leva a

$$R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R=-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}-\frac{1}{2}\nabla^2(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})+\frac{1}{2}\partial_i\partial_j h^{ij}=-\frac{1}{2}\nabla^2(\eta^{ij}h_{ij})+\frac{1}{2}\partial_i\partial_j h^{ij} ,$$

de onde, infelizmente, desaparece a dependência em h_{00} que desejávamos.

No entanto, a equação $R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa T_{ab}$ é equivalente a

$$R_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right), \quad T := g^{ab} T_{ab}.$$

Mostre isso!

Sendo assim:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \simeq R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \simeq \kappa \left[\rho + \frac{1}{2} \left(-\rho + \eta^{ij} T_{ij} \right) \right] \simeq \frac{\kappa \rho}{2},$$

onde foi usado que p/ sistemas não relativísticos as componentes espaciais de T_{ab} são muito menores que ρ. Assim, comparando essa última expressão com a gravitação de Newton, temos $\kappa = 8\pi G$ e, finalmente, chegamos às equações de Einstein da Relatividade Geral:

$$\boxed{G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T_{ab}}.$$

(G_{ab} é chamado de tensor de Einstein.) Um fato curioso sobre essa equação é que ela não apenas diz como o espaço-tempo deve se curvar devido à presença de energia, mas também impõe vínculos em como essa energia deve evoluir, devido à identidade de Bianchi, que força que $\nabla_a T^{ab} = 0$. Nas palavras de J. A. Wheeler,

"matter tells spacetime how to curve and spacetime tells matter how to move."

Esse é o conteúdo das equações de Einstein.