Geodésicas e Curvatura

Depois da discussão da lei da inércia e referenciais inerciais, associadas ao Princípio de Equivalência de Einstein, vimos que objetos sob ação apenas da gravidade seguem linhas-de-mundo que são as mais "retas" possíveis no espaço-tempo. Agora que temos uma noção de derivada covariante (compatível com a métrica g_{ab}), podemos expressar matematicamente essa ideia dizendo que partículas sob ação exclusiva da gravidade seguem linhas-de-mundo cuja direção no espaço-tempo não muda ao longo de si mesma. Ou seja, sendo $v^a(\lambda)$ o vetor tangente à linha-de-mundo, a condição de inercialidade é dada pela equação da geodésica:

$$(D_v v)^a \propto v^a;$$

ou seja, o 4-vetor tangente à linha-de-mundo inercial não pode mudar sua direção. A equação acima pode ser simplificada reparametrizando a curva $\lambda \mapsto \tau(\lambda)$, de modo que, adotando um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$,

$$v^a \nabla_a f = v^\mu \partial_\mu f = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f$$

$$u^a \nabla_a f := u^\mu \partial_\mu f = \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu f$$

$$(D_v v)^a = \kappa(\lambda) v^a(\lambda) \Leftrightarrow v^b \nabla_b v^a = \kappa(\lambda) v^a \Leftrightarrow v^\mu \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} v^\mu v^\alpha = \kappa v^\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \kappa(\lambda) v^\nu \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\int \kappa(\lambda) d\lambda} v^\nu\right) + e^{-\int \kappa(\lambda) d\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} v^\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\int \kappa(\lambda)d\lambda} \frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\int \kappa(\lambda)d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\left(e^{-\int \kappa(\lambda)d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\left(e^{-\int \kappa(\lambda)d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right) = 0$$

Logo, definindo $d\tau = e^{\int \kappa(\lambda)d\lambda} d\lambda$, o 4-vetor u^a com componentes $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ satisfaz:

$$\boxed{(D_u u)^a \equiv u^b \nabla_b u^a = 0} \qquad \text{(Eq. da Geodésica)}.$$

O parametro τ que faz com que o vetor tangente $u^a = \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^a_\mu$ a uma geodésica satisfaça $u^b \nabla_b u^a = 0$ é dito ser um parâmetro afim.

Exercício: Mostre que se τ e τ' são parametros afins de uma mesma geodésica, então

$$\tau' = a\tau + b,$$

onde a e b são constantes reais.

Exercício: Mostre que a equação da geodésica implica que $g_{ab}u^a u^b = \text{constante}$ ao longo da geodésica. (Isso mostra que geodésicas são globalmente tipo-tempo, ou tipo-espaço, ou tipo-luz.)

No caso de linhas-de-mundo tipo-tempo, o 4-vetor tangente u^a normalizado a $g_{ab}u^a u^b = -1$ $(c=1)$ é chamado de 4-velocidade. Nesse caso, define-se a 4-aceleração por $a^a := (D_u u)^a = u^b \nabla_b u^a$ e a aceleração própria por $a := \sqrt{g_{ab} a^a a^b}$.

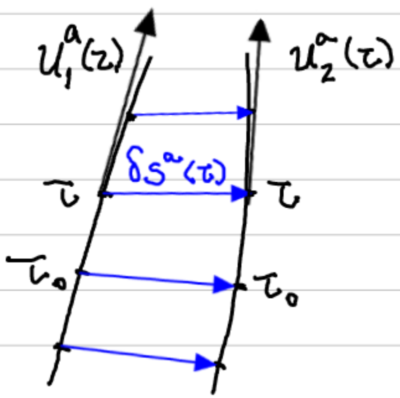
Exercício: Mostre que a 4-aceleração de uma linha-de-mundo satisfaz $g_{ab}u^a a^b = 0$. Argumente, então, no caso em que $a^a \neq 0$, se a^a é tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço.

Obs.: Note que esse conceito de aceleração é algo absoluto (independente de referencial), com intensidade dada pela aceleração própria. Evidentemente, geodésicas possuem 4-aceleração e aceleração própria nulas.

No entanto, dadas geodésicas próximas uma à outra, é útil definirmos o conceito de "aceleração relativa" entre elas (embora a aceleração absoluta de cada uma delas seja nula, por definição).

• Desvio geodésico e curvatura de Riemann

Consideremos duas geodésicas "vizinhas", com 4-velocidades $u_1^a(\tau)$ e $u_2^a(\tau)$. Seja $\delta s^a(\tau)$ um 4-vetor (infinitesimal) que relaciona os eventos parametrizados por valores iguais de τ. Por construção, $[u, \delta s]^a = 0$ (sendo u^a a 4-velocidade de uma congruência de geodésicas à qual as duas geodésicas iniciais pertencem. Define-se a "aceleração relativa" (ou "desvio geodésico") entre as duas geodésicas acima através de:



$$\ddot{\delta s}^a := u^c \nabla_c (u^b \nabla_b \delta s^a) = u^c \nabla_c (\delta s^b \nabla_b u^a) = (u^c \nabla_c \delta s^b) \nabla_b u^a + u^c \delta s^b \nabla_c \nabla_b u^a$$

$$= (\delta s^c \nabla_c u^b) \nabla_b u^a + \delta s^b u^c \nabla_c \nabla_b u^a =$$

$$= \delta s^c \nabla_c (\underbrace{u^b \nabla_b u^a}_{\to 0}) - \delta s^c u^b \nabla_c \nabla_b u^a + \delta s^b u^c \nabla_c \nabla_b u^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\delta \ddot{s}^a = u^b \delta s^c (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) u^a}$$

Nesse ponto, pareceria que p/ seguir adiante no cálculo de $\delta\ddot{s}^a$ deveríamos resolver a equação da geodésica p/, então, podermos substituir na expressão acima, em particular calculando as segundas derivadas. No entanto, a comutação de derivadas covariantes atuando em vetores (e tensores em geral) tem uma propriedade interessante:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f u^c) = \nabla_a\left[(\nabla_b f) u^c + f \nabla_b u^c\right] - \nabla_b\left[(\nabla_a f) u^c + f \nabla_a u^c\right] =$$

$$= (\nabla_a \nabla_b f) u^c + \cancel{\nabla_b f \nabla_a u^c} + \cancel{\nabla_a f \nabla_b u^c} + f \nabla_a \nabla_b u^c +$$
$$- (\nabla_b \nabla_a f) u^c - \cancel{\nabla_a f \nabla_b u^c} - \cancel{\nabla_b f \nabla_a u^c} - f \nabla_b \nabla_a u^c$$

$$= \left[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f\right] u^c + f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u^c$$

$$= \underbrace{\cancel{T^d{}_{ba}}}_{\to\, 0 \text{ (torção nula)}} (\nabla_d f) u^c + f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u^c = f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u^c$$

Logo, pelo mesmo argumento usado na aula anterior p/ mostrar que $(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a) u^b|_p$ dependia apenas de $u^a|_p$ (o que levou à definição do tensor C^a_{bc}), o resultado acima implica que existe um tensor de posto (1,3) tal que:

$$\boxed{(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u^c = \underset{\text{apenas convenção}}{-} R_{abd}{}^c u^d} \qquad \text{(tensor de Riemann)}$$

O exercício a seguir pede p/ você calcular (em termos de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$) as componentes desse tensor num sistema de coordenadas qualquer.

Exercício: Adotando um sistema de coordenadas qualquer e sendo $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ o símbolo de Christoffel que relaciona ∇_a com as derivadas parciais nessas coordenadas, mostre que as componentes de $R_{abc}{}^{d}$ nessas coordenadas são dadas por:

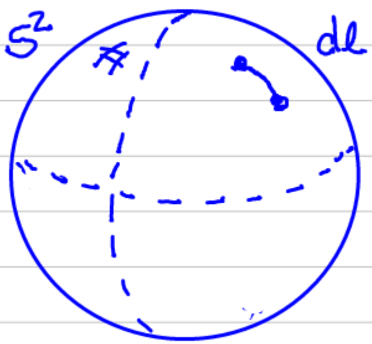
$$\boxed{R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}}$$

Voltando ao cálculo da aceleração relativa entre geodésicas:

$$\boxed{\ddot{\delta s}^{a} = - R_{bcd}{}^{a}\, u^{b}\, \delta s^{c}\, u^{d}}$$

Portanto, a aceleração relativa entre geodésicas depende do tensor de Riemann que, por sua vez, depende da métrica e suas derivadas parciais até segunda ordem.

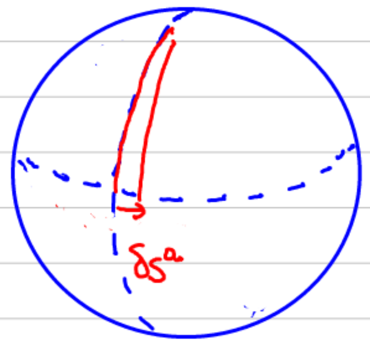
Exemplo bidimensional: Esfera de raio a.



$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma^{i}_{jk} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{cotg}\,\theta \\ \mathrm{cotg}\,\theta & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_{121}{}^{2} = 1 \\ R_{122}{}^{1} = -\sin^2\theta \\ R_{211}{}^{2} = -1 \\ R_{212}{}^{1} = \sin^2\theta \end{cases}$$

(todas as outras componentes nulas)



Considerando as duas geodésicas representadas ao lado, cujo vetor tangente é dado por

$$u^a = u^1 \partial_\theta^a + u^2 \partial_\phi^a \quad , \text{ com } u^2 = 0 \text{ (trajetória polar) e}$$

u^1 determinado pela condição de normalização

$$g_{ab} u^a u^b = a^2 (u^1)^2 = 1 \Rightarrow u^1 = a^{-1}.$$

Logo, à medida que as geodésicas se afastam do equador, a "aceleração relativa" entre elas é dada por:

$$\ddot{\delta s}^a = - R_{bcd}{}^a u^b \delta s^c u^d = - R_{1c1}{}^a a^{-2} \delta s^c = - \frac{(\delta s^2)\partial_\phi^a}{a^2} = - \frac{\delta s^a}{a^2}$$

Calculando a norma dessa aceleração relativa por unidade de distanciamento entre as geodésicas, temos:

$$\left| \frac{\ddot{\delta s}}{\delta s} \right| = \sqrt{\frac{g_{ab} \ddot{\delta s}^a \ddot{\delta s}^b}{g_{cd} \delta s^c \delta s^d}} = \frac{1}{a^2}. \quad \text{(convergindo as geodésicas – vide sinais opostos de } \delta s^a \text{ e } \ddot{\delta s}^a)$$

O resultado acima ilustra uma propriedade genérica: a aceleração relativa entre geodésicas é tipicamente dada pelo quadrado do inverso do "raio de curvatura" do espaço(-tempo).

Exercício: Mostre que p/ um campo covetorial ω_a, tem-se

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^{d}\omega_d$$

Exercício: Calcule $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T^c{}_d$, onde $T^c{}_d$ é um tensor de posto (1,1) qualquer

Exercício: Seja $R_{abcd} := R_{abc}{}^{e} g_{ed}$. Mostre que:

(i) $R_{abcd} = -R_{bacd}$; (SUGESTÃO: USE A DEFINIÇÃO.)
(ii) $R_{abcd} = -R_{abdc}$; (SUGESTÃO: Desenvolva $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)g_{cd}$.)
(iii) $R_{[abc]d} = 0$; (SUGESTÃO: Mostre que $\nabla_{[a}\nabla_b\,\omega_{c]} \equiv 0$ p/ qualquer ω_a.)
(iv) $R_{abcd} = R_{cdab}$; (SUGESTÃO: USE AS propriedades ACIMA.)
(v) $\nabla_{[e}R_{ab]cd} = 0$. (SUGESTÃO: Aplique a DERIVADA COVARIANTE NA DEFINIÇÃO do tensor de Riemann e desenvolva.)

(Obs: O resultado expresso em (v) é chamado de "identidade de Bianchi" e desempenha um papel importante em Relatividade Geral.)

(Obs. 2: Os colchetes [...] nos índices em (iii) e (v) representam antissimetrização nesses índices:

$$A_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(A_{abc} + A_{cab} + A_{bca} - A_{acb} - A_{bac} - A_{cba}\right).$$

Tente entender como esse procedimento se generalizaria p/ um posto qualquer.)

Exercício: Num espaço(-tempo) de dimensão $n=2,3,4$ calcule quantas componentes independentes R_{abcd} possui. (Lembre-se dos vínculos (i)-(iv) acima.)

A partir do tensor de Riemann, outras quantidades, que serão importantes no que segue, são definidas:

- Tensor de Ricci: $R_{ab} := R_{acb}{}^{c}$
- Escalar de curvatura de Ricci: $R = g^{ab} R_{ab}$
- Tensor de Weyl (em 4 dimensões):

$$C_{abcd} := R_{abcd} - \frac{1}{2}\left(R_{ac}g_{bd} - R_{ad}g_{bc} + R_{bd}g_{ac} - R_{bc}g_{ad}\right) + \frac{R}{6}\left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}\right)$$

Exercício: O que a identidade de Bianchi implica p/ R_{ab} e R?

Exercício: Calcule R_{ab} e R p/ o exemplo de esfera bidimensional de raio a.