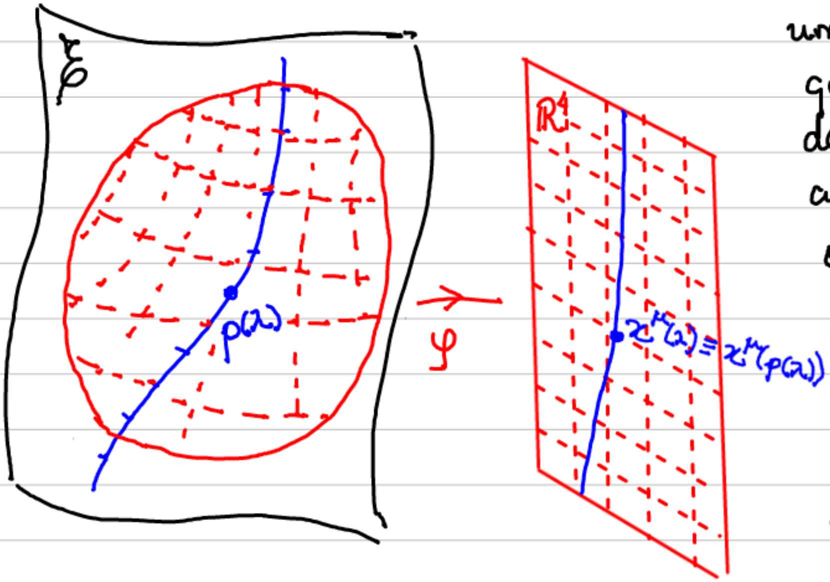
Linhas-de-mundo, 4-velocidade e velocidade espacial

Na linguagem de espaço-tempo, a história da evolução de uma partícula é dada pela sua linha-de-mundo: o conjunto de todos os eventos ocupados pela partícula ao longo de sua existência. Dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, a linha-de-mundo é representada por uma curva (em $\mathbb{R}^4$) $x^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro qualquer que localiza eventos diferentes nessa curva — pode ser o tempo do laboratório que está analisando o movimento da partícula, ou o tempo decorrido para a própria partícula, dentre outras infinitas possibilidades.



Dada uma parametrização, o 4-vetor tangente à linha-de-mundo é definido por

$$v^a\big|_{p(\lambda)}(f) := \left.\frac{d f(p(\lambda'))}{d\lambda'}\right|_{\lambda'=\lambda} = \left.\frac{d}{d\lambda'}\left[f\circ\varphi^{-1}(x^\mu(\lambda'))\right]\right|_{\lambda'=\lambda} = \partial_\mu(f\circ\varphi^{-1})\Big|_{x^\mu} \left.\frac{dx^\mu(\lambda')}{d\lambda'}\right|_{\lambda'=\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^a = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\partial^a_\mu}$$

, lembrando que $\partial^a_\mu(f) := \partial_\mu(f\circ\varphi^{-1})$ é a definição dos elementos da base coordenada $\{\partial^a_\mu\}$.

Embora o 4-vetor acima seja independente de sistema de coordenadas — $v^\mu := dx^\mu/d\lambda$ depende, mas não v^a —, ele ainda depende de uma escolha arbitrária de parâmetro λ:

$$\lambda \mapsto \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\lambda) \Rightarrow \tilde{v}^a = \left(\frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}}\right) v^a$$

(A inversa $\tilde{\lambda} \mapsto \lambda = \lambda(\tilde{\lambda})$ existe ao menos localmente devido à injetividade de $\tilde{\lambda}(\lambda)$)

Mostre isso!

Para evitar essa arbitrariedade inconveniente, queremos caracterizar a linha-de-mundo (assim como seu 4-vetor tangente) apenas usando informação da própria linha-de-mundo e da geometria do espaço-tempo subjacente. Podemos fazer isso impondo alguma condição de normalização p/ o 4-vetor tangente, desde que $g_{ab}v^a v^b \neq 0$. Por convenção, para uma linha-de-mundo tipo-tempo ($g_{ab}v^a v^b < 0$), normaliza-se o 4-vetor tangente a -1 ($-c^2 = -1$) e, nesse caso, o chamamos de 4-velocidade: v^a é 4-velocidade $\Rightarrow g_{ab}v^a v^b = -1$. Essa condição de normalização acaba sendo equivalente a parametrizar a linha-de-mundo pelo tempo-próprio (ou seja, o tempo decorrido para a partícula seguindo a linha-de-mundo) entre quaisquer dois de seus eventos.

Exercício: Mostre que u^a é a 4-velocidade de uma partícula se, e somente se, $u^a(\tau)$ é o 4-vetor tangente a uma linha-de-mundo parametrizada pelo seu tempo-próprio (definido a menos de uma constante aditiva).

Resolução: Dada uma linha-de-mundo tipo-tempo com 4-vetor tangente $v^a(\lambda)$ qualquer, o tempo-próprio decorrido entre dois eventos $p(\lambda)$ e $p(\lambda+d\lambda)$ arbitrariamente próximos é dado por (abaixo, $dx^\mu := x^\mu(p(\lambda+d\lambda)) - x^\mu(p(\lambda))$):

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu} \Leftrightarrow \left|\frac{d\tau}{d\lambda}\right| = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \sqrt{-g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{d\tau}{d\lambda}\right| = \sqrt{-g_{ab}v^a v^b}$$

Logo $|\Delta\lambda| = |\Delta\tau| \Longleftrightarrow g_{ab}v^a v^b = -1$.

- Velocidade espacial (ou 3-velocidade): nota de cuidado!

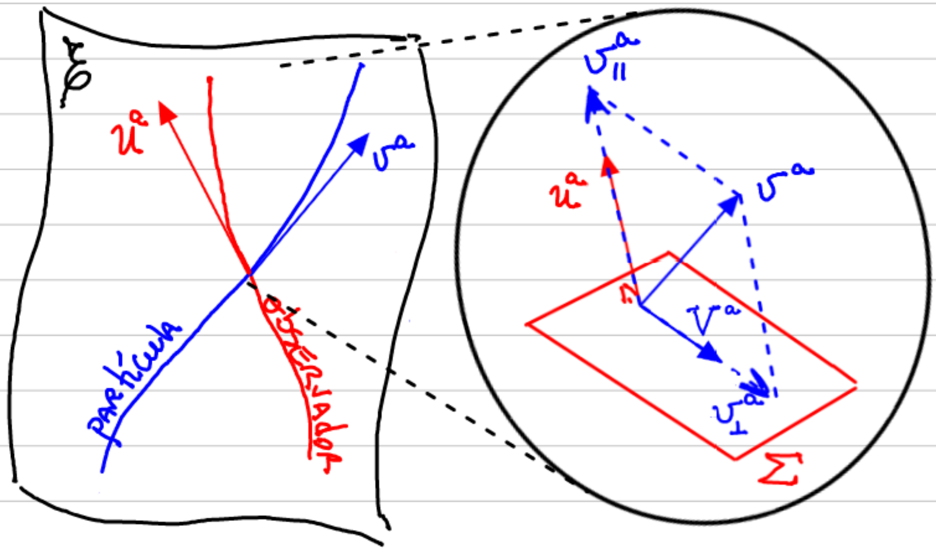
Dada uma 4-velocidade v^a cujas componentes num dado sistema de coordenadas são $v^\mu = (v^0, v^i)$, é muito tentador atribuir alguma interpretação física p/ as componentes v^i ligada à "velocidade espacial" da partícula com 4-velocidade v^a. No entanto, embora em espaço-tempo de Minkowski e em referenciais inerciais tal associação seja possível,

$$v^\mu = \gamma(1, \vec{v}) \quad \left(\text{onde } \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ e } \vec{v} \text{ é a velocidade espacial dessa partícula nesse referencial inercial adotado}\right),$$

em geral tal associação é enganosa. Primeiro, porque sistemas de coordenadas são apenas "rótulos" dados aos eventos p/ diferenciá-los, não necessariamente dotados de alguma interpretação física. Assim, supor que v^1, v^2 e v^3 realmente representem direções espaciais é uma hipótese que pode não se verificar. Além disso — e mais importante — a noção do que é "espaço" depende do observador, de modo que não é razoável se atribuir uma "velocidade espacial" a uma partícula sem deixar claro p/ quem essa interpretação seria correta (algo que independe de coordenadas).

Para definirmos qual seria a velocidade espacial (ou 3-velocidade) de uma partícula com 4-velocidade v^a, primeiro temos que especificar qual observador aferiria essa velocidade espacial. Seja u^a a 4-velocidade do observador em questão. Como em espaços-tempos curvos não existe, em geral, uma maneira privilegiada, fisicamente, p/ se relacionar 4-vetores em eventos distintos, isso significa que p/ um observador com 4-velocidade u^a "medir" a velocidade espacial associada à 4-velocidade v^a de maneira que não haja ambiguidades/arbitrariedades, é

NECESSÁRIO que u^a e v^a estejam definidos no mesmo evento; ou seja, a partícula deve "cruzar" com o observador (ou passar perto o suficiente p/ que a noção de paralelismo seja boa o suficiente p/ a precisão que se espera p/ a medida). Então no evento de cruzamento, podemos decompor



v^a em duas componentes, uma na direção de u^a ($v^a_\parallel$) e outra "ortogonal" a u^a ($v^a_\perp$). Mais uma vez, poderíamos ficar tentados a dizer que $v^a_\perp$ (a parte de v^a que é "puramente espacial" p/ o observador c/ 4-velocidade u^a) representa a velocidade espacial da partícula. No entanto, embora $v^a_\perp$ codifique corretamente direção e sentido do movimento da partícula em relação ao observador, o seu tamanho está incorreto. Pode-se entender isso pela figura acima: $\|v^a_\perp\|$ seria (numericamente igual a) a distância espacial percorrida pela partícula c/ 4-velocidade (instantânea) v^a no decorrer de um intervalo de tempo (numericamente igual a) $\|v^a_\parallel\|$. Logo, a "rapidez" do movimento espacial seria dada por $\|v^a_\perp\|/\|v^a_\parallel\|$. Sendo assim, o (4-)vetor que codifica, p/ o observador, a velocidade espacial V^a da partícula é dado por:

$$V^a := \frac{\cancel{\|v^a_\perp\|}}{\|v^a_\parallel\|}\,\frac{v^a_\perp}{\cancel{\|v^a_\perp\|}} = \frac{v^a_\perp}{\|v^a_\parallel\|} = \frac{(\delta^a_b + u^a u_b)\,v^b}{|g_{ab}v^a u^b|\,\|u^a\|} = \frac{v^a + (u_b v^b)\,u^a}{-(u_c v^c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{V^a = -\dfrac{v^a}{(u_b v^b)} - u^a} \\[2ex] \boxed{V := \|V^a\| = \dfrac{\|v_\perp^a\|}{\|v_\parallel^a\|} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{(u_a v^a)^2}}} \end{cases} \iff \begin{array}{l} \boxed{v^a = |u_b v^b|\,(u^a + V^a)} \\[2ex] \boxed{|u_a v^a| = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2}}} \;\; (=: \gamma \text{ de Lorentz!}) \end{array}$$

IMPORTANTE: Note que as expressões acima são totalmente independentes de sistema de coordenadas. Logo, podemos expressá-las em termos de componentes usando qualquer sistema de coordenadas.

Exercício: Considere um espaço-tempo bidimensional tal que no sistema de coordenadas $\{(t, r)\}$, as componentes da métrica são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{A}{r}\right) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r > A > 0.$$

Um observador $\mathcal{O}$ encontra-se "parado" em $r = r_0$ e uma partícula passa por ele numa linha-de-mundo cujo 4-vetor tangente tem componentes $v^\mu = (\alpha, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Supondo que v^a é a 4-velocidade de uma linha-de-mundo tipo-tempo, determine o vínculo entre α e β e seus respectivos intervalos de valores;

b) Ainda sob as condições do item anterior, calcule a velocidade espacial $V = \|v^a\|$ atribuída à partícula pelo observador $\mathcal{O}'$, como função de <u>um</u> dos parâmetros α, β. Além disso, analise o comportamento de V p/ $r_0 \to A$;

c) Refaça os itens anteriores supondo que v^a é tipo-luz.

Obs.: Note que as componentes $v^0 = \alpha$ e $v^1 = \beta$ não possuem diretamente interpretação física de fator de Lorentz e velocidade espacial.