Métrica e intervalo invariante

Já vimos como munir o conjunto de eventos com a noção de direcionalidade em cada evento — através do mapeamento $\psi_p : (\mathcal{U}_p \subseteq \xi) \to (U_p \subseteq \mathbb{R}^n)$. Falta, ainda, munir o conjunto de eventos com uma noção de medida que forneça intervalos de tempo ao longo de direções temporais e distâncias ao longo de direções espaciais. Fazendo uso do mapeamento ψ_p, podemos munir $\mathbb{V}_p$ com essa noção de medida que, então, pode ser importado p/ ξ através de ψ_p^{-1}. Isso é feito pela métrica.

- **Métrica lorentziana**: $g_{ab} : \mathbb{V}_p \times \mathbb{V}_p \to \mathbb{R}$:

  (i) $u^a, v^a \in \mathbb{V}_p \Rightarrow g_{ab} u^a v^b = g_{ab} v^a u^b$; (simetria)

  (ii) $g_{ab} u^b = 0 \Leftrightarrow u^a = 0$; (não-degenerescência)

  (iii) $\exists u^a \in \mathbb{V}_p \,/\, g_{ab} u^a u^b < 0$. Além disso, se $g_{ab} u^a v^b = 0$ p/ $v^a \neq 0$, então $g_{ab} v^a v^b > 0$.
  (assinatura lorentziana)

Note que a assinatura lorentziana permite discernir pelo menos dois tipos de direções: aquelas associadas a v^a satisfazendo $g_{ab} v^a v^b > 0$ e $g_{ab} v^a v^b < 0$. Na verdade, há ainda um terceiro tipo de direção: aquelas associadas a $v^a \neq 0$ com $g_{ab} v^a v^b = 0$.

Exercício: Mostre que há infinitas direções diferentes, dadas por v^a, tais que $g_{ab} v^a v^b < 0$

Exercício: Mostre que há direções dadas por $v^a \in \mathbb{V}_p$ satisfazendo $g_{ab} v^a v^b = 0$

Exercício: Dado um 4-vetor $v^a \in \mathbb{V}_p$, $v^a \neq 0$, mostre que os 4-vetores e^a que satisfazem $g_{ab} v^a e^b = 0$ formam um subespaço de $\mathbb{V}_p$ – denotado por

$$\mathbb{V}_p^{\perp}(v^a) := \{ e^a \in \mathbb{V}_p \,/\, g_{ab} v^a e^b = 0 \}$$

e denominado <u>subespaço ortogonal a v^a</u>. [Note que se $v^a \neq 0$ satisfaz $g_{ab} v^a v^b = 0$, então $v^a \in \mathbb{V}_p^{\perp}(v^a)$.]

• Isomorfismo canônico entre $\mathbb{V}_p$ e $\mathbb{V}_p^*$

Uma vez definido um tensor de posto (0,2) não-degenerado que, por alguma razão, tem um status privilegiado, pode-se estabelecer um isomorfismo privilegiado entre $\mathbb{V}_p$ e $\mathbb{V}_p^*$ fazendo-se uso desse tensor. Esse é o caso da métrica g_{ab}.

$$\mathbb{V}_p \ni u^a \longmapsto u_a := g_{ab} u^b \in \mathbb{V}_p^*$$

O isomorfismo inverso é dado pelo tensor de posto (2,0), g^{ab}, satisfazendo:

$$g^{ab} g_{bc} = g_{cb} g^{ba} = \delta^a_{\ c}.$$

Com ele, temos: $g^{ab} u_b = g^{ab} g_{bc} u^c = \delta^a_{\ c} u^c = u^a$. Logo:

$$\mathbb{V}_p^* \ni u_a \longmapsto u^a := g^{ab} u_b \in \mathbb{V}_p$$

Logo, dado um tensor métrico, podemos representar a mesma quantidade física com índices em cima (ou seja, atuando em $\mathbb{V}_p^*$) ou embaixo (ou seja, atuando em $\mathbb{V}_p$), bastando relacioná-las usando g_{ab} ou g^{ab}

• Projeção ortogonal: Dado um 4-vetor $v^a \in \mathbb{V}_p$ qualquer satisfazendo $g_{ab} v^a v^b \neq 0$, o tensor de posto $(1,1)$ definido por

$$h^a{}_b := \delta^a{}_b - \frac{v^a v_b}{(g_{cd} v^c v^d)},$$

denominado projetor ortogonal a v^a, mapeia elementos de $\mathbb{V}_p$ em $\mathbb{V}_p^{\perp}(v^a)$

Exercício: Mostre que $h^a{}_b$ é de fato um projetor ortogonal. Ou seja:

(i) $h^a{}_b h^b{}_c = h^a{}_c$; (projetor)
(ii) $g_{ab} h^b{}_c = h^b{}_a g_{bc}$. (ortogonalidade)

Exercício: Mostre que $h_{ab} := g_{ac} h^c{}_b$ é:

(i) Uma métrica positivo-definida em $\mathbb{V}_p^{\perp}(v^a)$ se $g_{ab} v^a v^b < 0$;
(ii) " " lorentziana em $\mathbb{V}_p^{\perp}(v^a)$ se $g_{ab} v^a v^b > 0$.

O resultado do exercício acima é útil para começarmos a entender a interpretação das direções dadas por v^a com $g_{ab} v^a v^b < 0$ e $g_{ab} v^a v^b > 0$. Em palavras, o subespaço ortogonal a um 4-vetor v^a com $g_{ab} v^a v^b < 0$ tem a propriedade de ser um espaço vetorial tridimensional com norma positivo-definida, assim como é a percepção de "espaço" que cada observador tem particularmente, julgando-se parado nesse "espaço" e evoluindo apenas no "tempo". Isso sugere interpretar v^a, com $g_{ab} v^a v^b < 0$, como caracterizando uma possível direção temporal p/ uma linha-de-mundo de um observador, para quem, então, os 4-vetores $e^a \in V_p^\perp(u^a)$ representariam direções puramente espaciais. Essa interpretação é reforçada pelo que se segue:

• Interpretação das "direções nulas"

Seja $l^a \in V_p$ um 4-vetor qualquer satisfazendo $g_{ab} l^a l^b = 0$, com $l^a \neq 0$. Agora, seja um 4-vetor $u^a \in V_p$ qualquer satisfazendo $g_{ab} u^a u^b < 0$. É fácil mostrar que obrigatoriamente tem-se $g_{ab} l^a u^b \neq 0$. Sem perda de generalidade, consideremos u^a "normalizado": $g_{ab} u^a u^b = -1$. Assim, l^a pode ser decomposto como:

$$l^a = \alpha u^a + \beta e^a \quad , \quad \text{com } e^a := \frac{h^a{}_b l^b}{(h_{cd} l^c l^d)^{1/2}},$$

onde $\alpha = -g_{ab} u^a l^b$ e $\beta = (h_{ab} l^a l^b)^{1/2}$. Notemos que dado l^a, os valores α e β dependem da escolha de u^a. Porém, note que uma medida de "inclinação" de l^a em relação à escolha de u^a ($e\ V_p^\perp(u^a)$), medida por

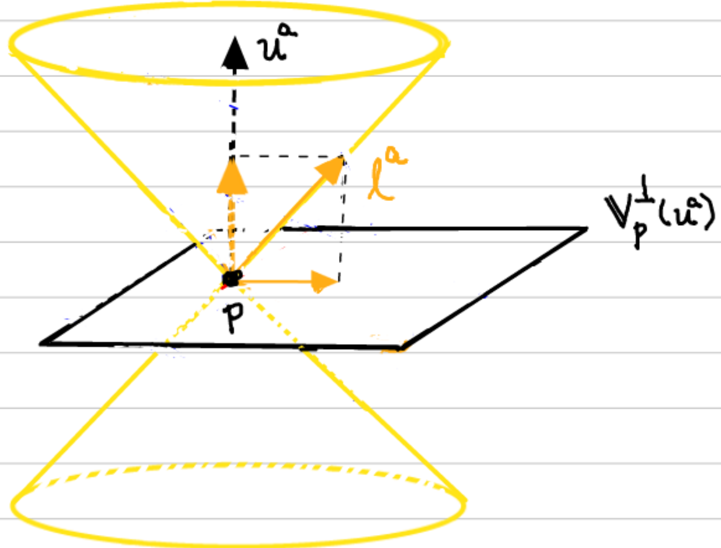
$$\frac{\|\beta e^a\|}{\|\alpha u^a\|} = \frac{(h_{ab} l^a l^b)^{1/2}}{|g_{cd} u^c l^d|} = \frac{[(g_{ab} + u_a u_b) l^a l^b]^{1/2}}{|u_c l^c|} = \frac{[(u_a l^a)^2]^{1/2}}{|u_c l^c|} = \frac{|u_a l^a|}{|u_c l^c|} = 1 \,,$$

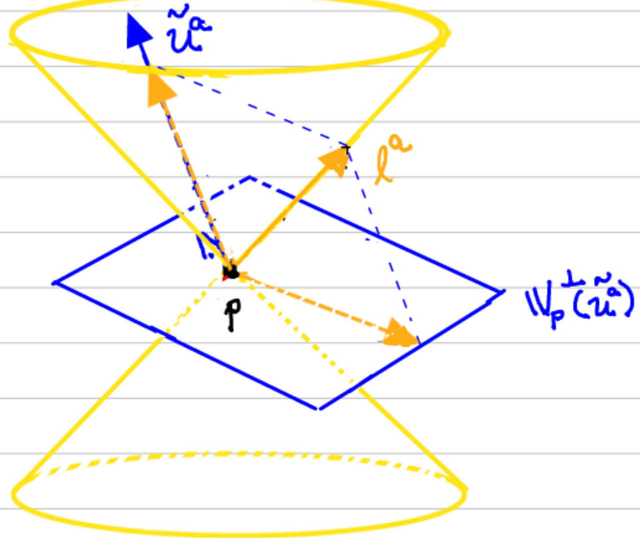
é independente da escolha de u^a.

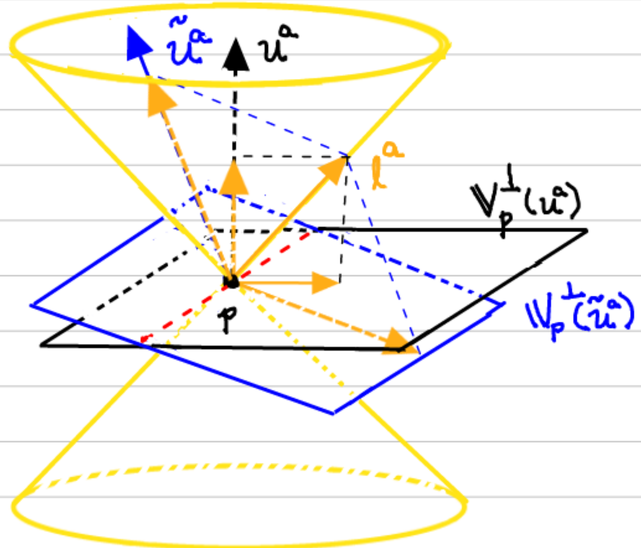
O resultado acima permite que ao se interpretar u^a, com $g_{ab} u^a u^b = -1$, como fornecendo uma unidade na direção temporal e $e^a \in V_p^\perp(u^a)$, com $g_{ab} e^a e^b = 1$, como fornecendo uma unidade de distância espacial p/ um observador com linha-de-mundo com 4-vetor tangente u^a, a razão $\frac{\|\beta e^a\|}{\|\alpha u^a\|} = \frac{\text{Distância percorrida num intervalo } \Delta t}{\Delta t}$ mede a velocidade espacial associada à direção l^a de acordo com o observador caracterizado por u^a.

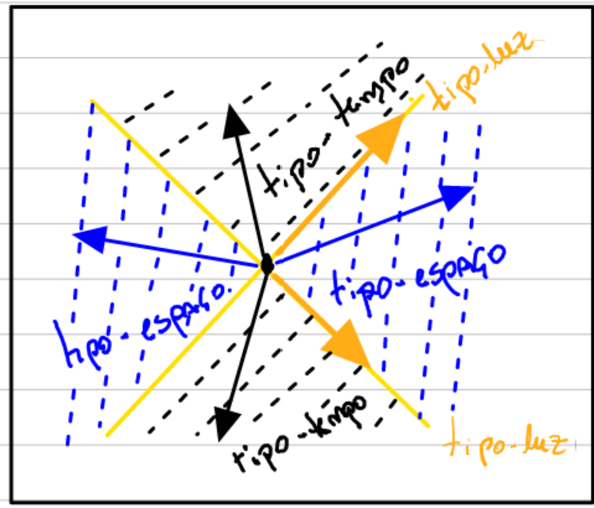
Portanto, direções dadas por ℓ^a com $g_{ab}\ell^a\ell^b = 0$ representam velocidades espaciais que possuem um valor absoluto independente do observador. Sendo assim, essas são as direções que serão atribuídas às linhas-de-mundo de partículas que viajam à velocidade da luz $c = 1$.

Resumindo:







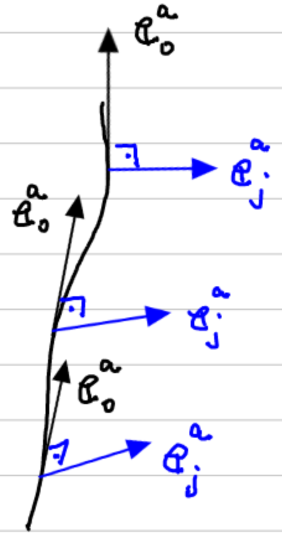


- TETRADAS: Um conjunto de $n=4$ 4-vetores $\{e_\mu^a\}$ é dito ser uma tetrada se

$$g_{ab}\, e_\mu^a\, e_\nu^b = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1).$$

(Obs.: Tetradas são o análogo de bases ortonormais de espaços com produto interno positivo-definido.)

Obs: Um observador é caracterizado por uma linha-de-mundo tipo-tempo com um campo suave de tetradas definido sobre ela, de modo que e_0^a lhe seja tangente.



Assim, $\{e_j^a\}_{j=1,2,3}$ gera a "seção espacial" do observador cuja 4-velocidade é dada por e_0^a.

Com a métrica definida em cada V_p, $p \in \mathcal{E}$, podemos induzir uma medida de intervalo entre eventos "próximos" p e q, $I(p,q) \in \mathbb{R}$, por:

$$I(p, \psi_p^{-1}(\epsilon v^a)) = \epsilon^2 g_{ab} v^a v^b + O(\epsilon^3)$$

ou, em termos de coordenadas $\varphi(p) = x^\mu(p)$:

$$I(p, q(\epsilon)) = \epsilon^2 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + O(\epsilon^3) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + O(\epsilon^3)$$, onde $\psi_p^{-1}(\epsilon v^a) =: q(\epsilon)$ e $dx^\mu := x^\mu(q(\epsilon)) - x^\mu(p) = \epsilon v^\mu + O(\epsilon^2)$

Note que o sinal de $I(p,q(\epsilon))$ depende do tipo de direção que separa esses eventos (dada por v^a). Independente desse sinal poder ser positivo ou negativo, denota-se essa quantidade infinitesimal quadrática como intervalo invariante

- <u>Intervalo invariante</u>: Dados dois eventos arbitrariamente próximos, p e q, com coordenadas $x^\mu(p) = x^\mu$ e $x^\mu(q) = x^\mu + dx^\mu$, o intervalo invariante entre eles é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Independe de sist. de coordenadas; Intrínseco à geometria do E.T.

(Note que ds^2 é apenas uma notação p/ uma quantidade real que pode assumir qualquer sinal.)

No caso de considerarmos que p e q pertencem a uma mesma curva, localizados pelos valor de parâmetro λ e $\lambda + d\lambda$, respectivamente, então

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)(d\lambda)^2 = (g_{ab} v^a v^b)(d\lambda^2)$$, onde $v^a = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu^a$ é o vetor tangente.

Note que $ds^2<0$ mede o intervalo invariante entre eventos separados na direção temporal um em relação ao outro ($g_{ab}v^av^b<0$). A argumentação usada anteriormente para se interpretar o significado das direções tipo-luz reforçou a interpretação de que um 4-vetor tipo-tempo u^a satisfazendo $g_{ab}u^au^b=-1$ definia uma unidade de tempo para o observador com linha-de-mundo com tangente u^a. Sendo assim, dados dois eventos p e q arbitrariamente próximos ao longo de uma linha-de-mundo tipo-tempo, o intervalo de tempo $d\tau$ decorrido entre eles ao longo dessa linha-de-mundo (ou seja, o tempo-próprio) é dado por:

$$ds^2 = g_{ab}(d\tau u^a)(d\tau u^b) = d\tau^2 g_{ab}u^au^b = -d\tau^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-g_{ab}v^av^b}\,d\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \int \sqrt{-g_{ab}v^av^b}\,d\lambda}$$

(tempo-próprio decorrido ao longo de uma linha-de-mundo tipo-tempo parametrizada por λ, com v^a sendo o 4-vetor tangente.)