■ Realização de $\mathbb{V}_p$ como operadores diferenciais

Na discussão sobre espaços-tempos genéricos, identificamos as estruturas que queremos, pelas características que desejamos. Falta, agora, implementar de maneira mais concreta essas estruturas. Para isso, vamos definir uma estrutura auxiliar:

Seja $\mathcal{F} = \{ f : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \}$ o conjunto de todas as funções reais sobre o espaço-tempo $\mathcal{E}$ tais que $f \circ \psi_p^{-1} : U_p \to \mathbb{R}$ sejam funções suaves de $U_p \subseteq \mathbb{V}_p$ em $\mathbb{R}$ para todo $p \in \mathcal{E}$ (ou seja, dada qualquer base de $\mathbb{V}_p$, digamos $\{x^a_\mu\}$, $f \circ \psi_p^{-1}(v^\mu x^a_\mu)$ é uma função suave de $(v^\mu) \in \mathbb{R}^n$)

Agora, considere a associação $\mathbb{V}_p \ni v^a \mapsto D_{v^a} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$v^a \in \mathbb{V}_p \Rightarrow D_{v^a}(f) := \left(\frac{d}{d\lambda} f \circ \psi_p^{-1}(\lambda v^a) \right) \Big|_{\lambda = 0} .$$

<u>Exercício</u>: Mostre que, sendo $u^a, v^a \in \mathbb{V}_p$, $c \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}$, tem-se:

(i) $D_{(u^a + c v^a)}(f) = D_{u^a}(f) + c D_{v^a}(f)$; (linearidade sobre $\mathbb{V}_p$)

(ii) $D_{v^a}(c) = 0$;

(iii) $D_{v^a}(f + cg) = D_{v^a}(f) + c D_{v^a}(g)$; (linearidade sobre $\mathcal{F}$)

(iv) $D_{v^a}(f \cdot g) = f(p) D_{v^a}(g) + g(p) D_{v^a}(f)$. (Regra de Leibnitz)

Sugestão: Mostre que, dada uma base $\{x^a_\mu\}$ de $\mathbb{V}_p$, $D_{v^a}(f) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha^\mu}\left[f \circ \psi_p^{-1}(\alpha^\mu x^a_\mu) \right] \Big|_{\alpha^\mu = 0} \cdot v^\mu$.

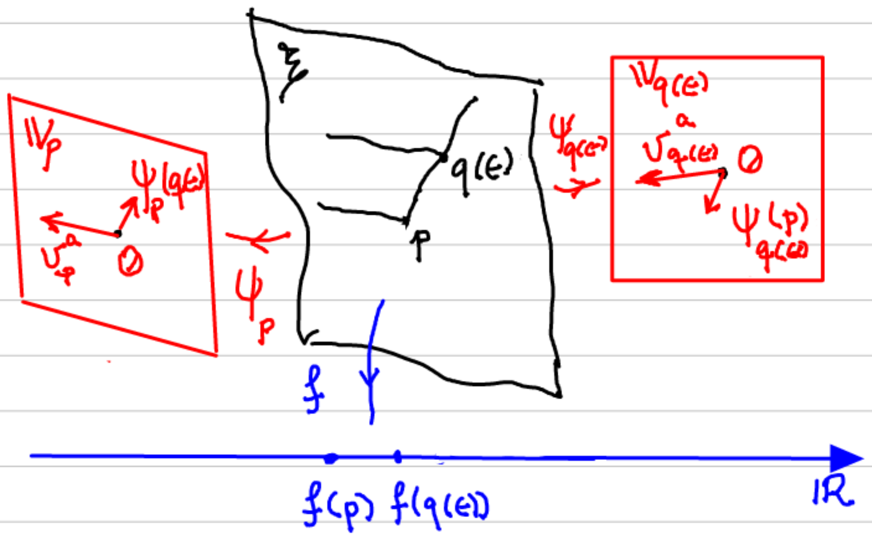
Note que a propriedade (i) mostra que, como função de v^a, $D_{v^a} f$ (p/ f fixo) é um funcional LINEAR sobre V_p. Ou seja, existe um covetor (que <u>denotaremos</u> por $\nabla_a f \in V_p^*$) definido por

$$v^a \in V_p \mapsto v^a \nabla_a f := D_{v^a} f \in \mathbb{R} \qquad (f \in \mathcal{F}) .$$

Além disso, as propriedades (ii) a (iv) conferem a $D_{v^a} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ (e a $\nabla_a : \mathcal{F} \to V_p^*$) o status de "operador derivativo" sobre $\mathcal{F}$ <u>em $p \in \xi$</u>.

- <u>Colagem de V_p usando $\mathcal{F}$</u>:

A ideia é fazer uso das funções $f \in \mathcal{F}$ para relacionar as colagens $\psi_p^{-1} : U_p \to \mathcal{U}_p$ para $p \in \xi$ vizinhos. Sejam p e $q(\epsilon)$ dois eventos vizinhos, com $q(\epsilon) \to p$ p/ $\epsilon \to 0$ (o que significa que $\psi_p(q(\epsilon)) = \epsilon w^a + O(\epsilon^2)$ p/ algum $w^a \in V_p$ fixo). Sejam v_p^a e $v^a_{q(\epsilon)}$ elementos de V_p e $V_{q(\epsilon)}$, respectivamente.



Queremos determinar qual condição $v^a_{q(\epsilon)}$ deve satisfazer p/ poder ser considerado que $v^a_{q(\epsilon)} \to v^a_p$. Como $f \in \mathcal{F}$ qualquer é suave, é natural impor

$$D_{v^a_{q(\epsilon)}}(f) - D_{v^a_p}(f) = O(\epsilon) \iff$$

$$\iff \frac{d}{d\lambda} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\lambda v^a_{q(\epsilon)}) - \frac{d}{d\lambda} f \circ \psi_p^{-1}(\lambda v_p^a) = O(\epsilon) \iff$$

$$\iff \frac{d}{d\lambda} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\lambda v^a_{q(\epsilon)}) - \frac{d}{d\lambda} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}(\lambda v_p)) = O(\epsilon) \iff$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial \alpha^\mu} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\alpha^\sigma x_\sigma^a(q(\epsilon)))\Big|_{\alpha^\sigma = 0} v^\mu_{q(\epsilon)} - \frac{\partial}{\partial \alpha^\mu} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\psi_{q(\epsilon)}(p) + \alpha^\sigma x^a_\sigma(q(\epsilon)))\Big|_{\alpha^\sigma = 0} \frac{d[\psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}(\lambda v_p)]^\mu}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = O(\epsilon) \iff$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial \alpha^\mu} f \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\alpha^\sigma x^a_\sigma(q(\epsilon)))\Big|_{\alpha^\sigma=0} \left[v^\mu_{q(\epsilon)} - \frac{d}{d\lambda}\left(\psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}(\lambda v_p^a)\right)^\mu \right] = \mathcal{O}(\varepsilon) \iff$$

$$\iff v^a_{q(\epsilon)} = \frac{d}{d\lambda}\left(\psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}(\lambda v^a_p)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \iff \boxed{\lambda v^a_{q(\epsilon)} = \psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}(\lambda v^a_p) - \psi_{q(\epsilon)}(p) + \mathcal{O}(\epsilon\lambda)}$$

Além disso, por simetria, devemos ter $\lambda v^a_p = \psi_p \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\lambda v^a_{q(\epsilon)}) - \psi_p(q(\epsilon)) + \mathcal{O}(\epsilon\lambda)$. Combinando ambas as expressões, temos:

$$\lambda v^a_{q(\epsilon)} = \psi_{q(\epsilon)} \circ \psi_p^{-1}\left(\psi_p \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\lambda v^a_{q(\epsilon)}) - \psi_p(q(\epsilon))\right) - \psi_{q(\epsilon)}(p) + \mathcal{O}(\lambda\epsilon) \iff$$

$$\iff \boxed{\psi_p \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}\left(\lambda v^a_{q(\epsilon)} + \psi_{q(\epsilon)}(p)\right) = \psi_p \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\lambda v^a_{q(\epsilon)}) - \psi_p(q(\epsilon)) + \mathcal{O}(\lambda\epsilon)}$$

Note que se definirmos um evento $r(\epsilon) := \psi^{-1}_{q(\epsilon)}(\varepsilon v^a_{q(\epsilon)})$, temos que $\psi_{q(\epsilon)}$ satisfaz:

$$\psi_p \circ \psi^{-1}_{q(\epsilon)}\left(\psi_{q(\epsilon)}(r(\epsilon)) + \psi_{q(\epsilon)}(p)\right) = \psi_p(r(\epsilon)) - \psi_p(q(\epsilon)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

que é exatamente a condição que desejávamos impor p/ $\psi_{q(\epsilon)}$.

<u>Exercício</u>: Mostre que o vínculo acima implica em:

(a) $D_{\psi_{q(\epsilon)}(r(\epsilon))} = D_{\psi_p(r(\epsilon))} - D_{\psi_p(q(\epsilon))} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

(b) $D_{\psi_p(q(\epsilon))} = - D_{\psi_{q(\epsilon)}(p)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

(c) $D_{\psi_p(q(\epsilon))} + D_{\psi_{q(\epsilon)}(r(\epsilon))} + D_{\psi_{r(\epsilon)}(p)} = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

- Resumindo

Podemos fazer uso da associação $V_p \ni v^a \leftrightarrow D_{v^a} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ p/ identificar vetores em $p \in \mathcal{E}$ com operadores derivativos atuando em $\mathcal{F}$, $v^a \equiv D_{v^a}$. Fica como exercício p/ os mais interessados mostrar que essa associação $v^a \leftrightarrow D_{v^a}$ é, de fato, um a um. Essa identificação traz a vantagem de impor a "colagem correta" de V_p p/ diferentes $p \in \mathcal{E}$ simplesmente pela condição de que $v^a(p) \in V_p$ é um campo contínuo, como função de p, se $v^a(p)(f)$ é uma função contínua de p.

Notação: $D_{v^a}\big|_p(f) \equiv v\big|_p(f)$.