Apresentação

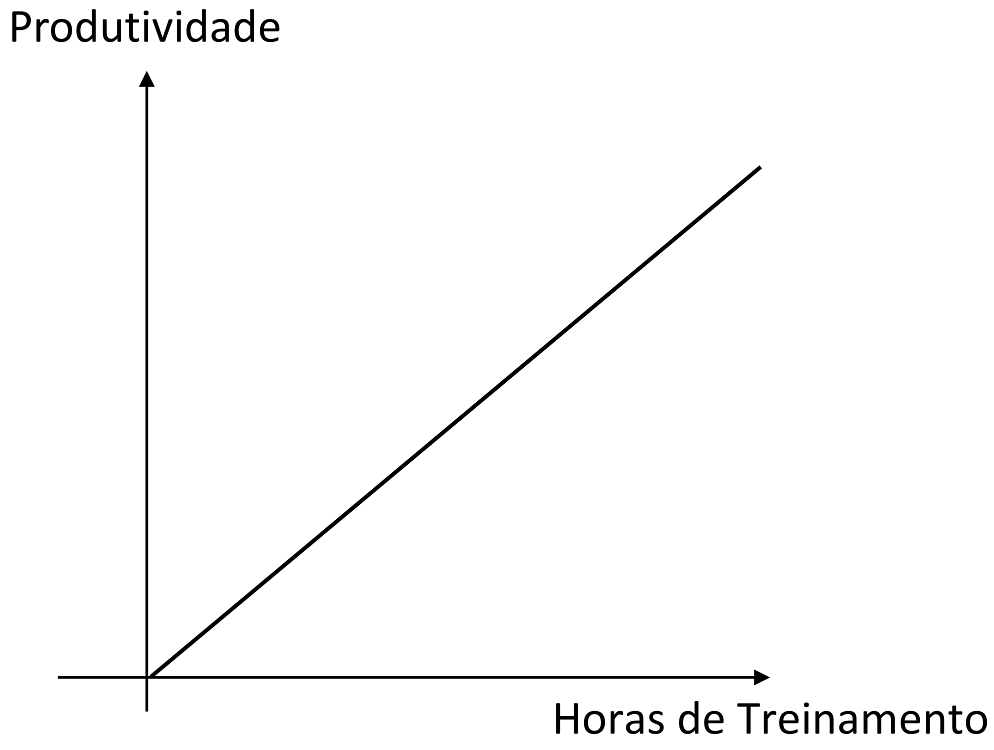
Ditado Popular...

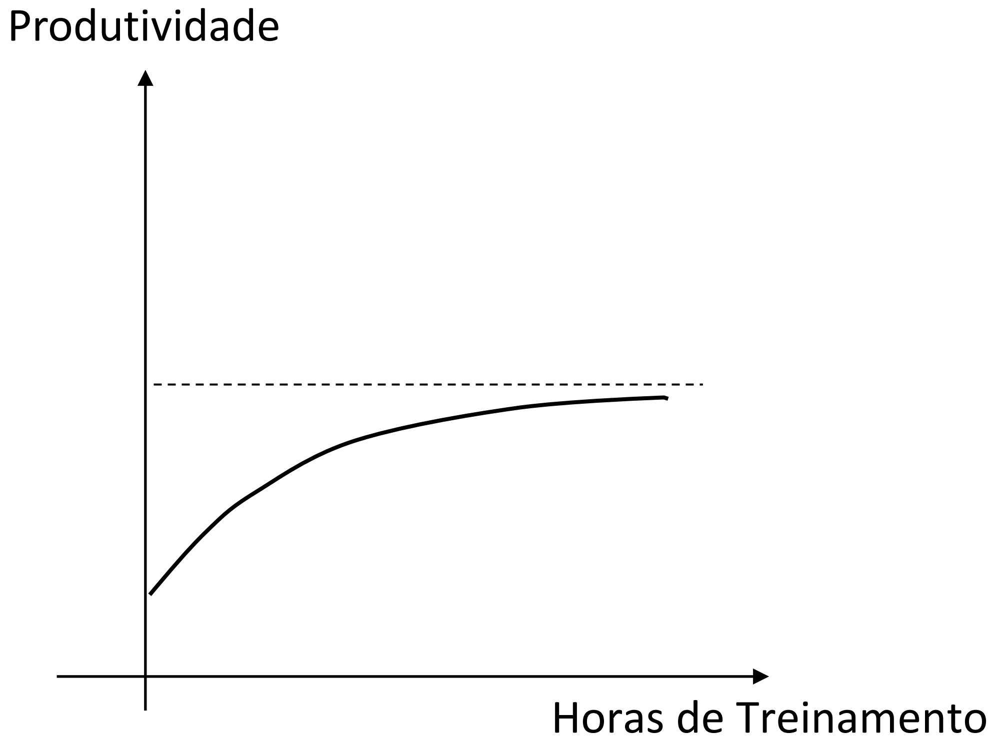
É melhor prevenir...

Prólogo

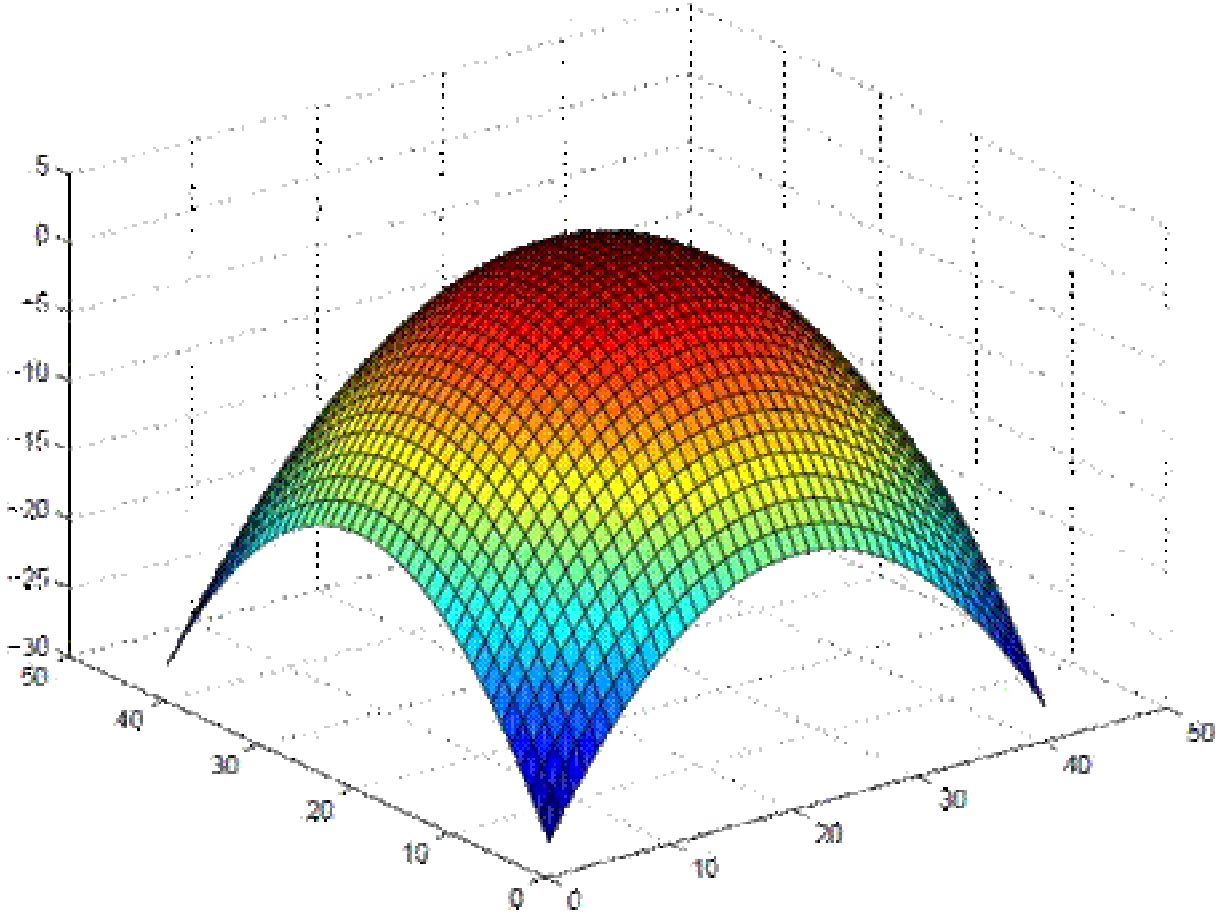
- ***Já ouviram falar de causalidade?***
- Por exemplo, como aumentar a produtividade de uma empresa?
  - Seleção
  - Automação
  - Treinamento
  - Terceirização
  - Etc

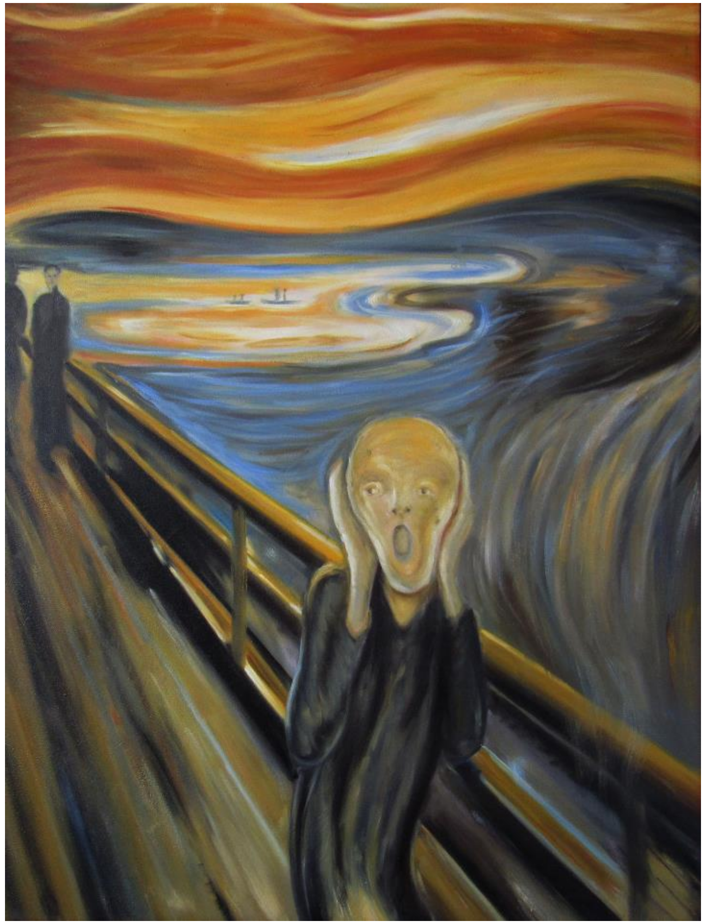
Prólogo


Produtividade
Horas de Treinamento

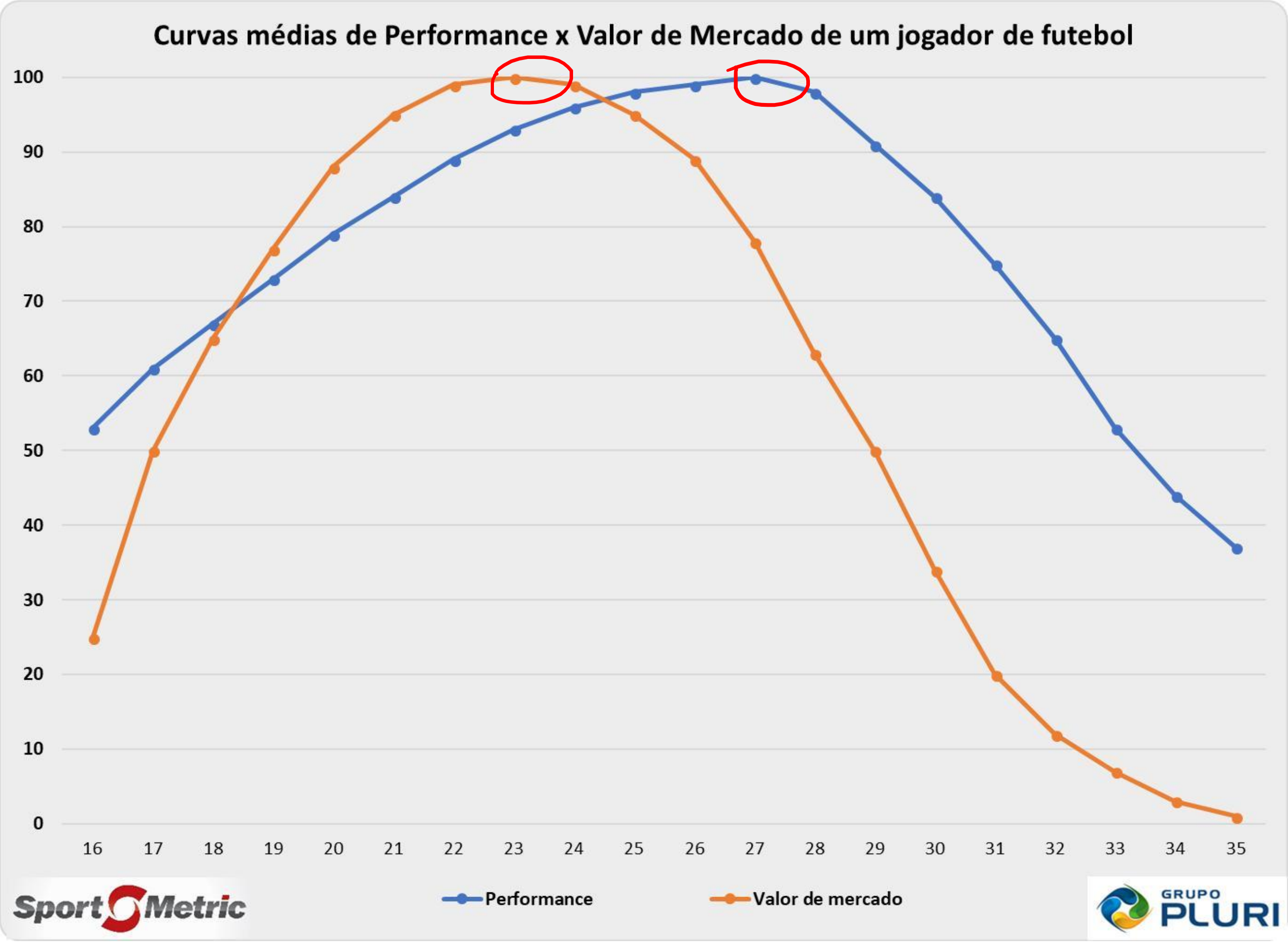

Produtividade
Horas de Treinamento

Prólogo





Coisa de acadêmico...

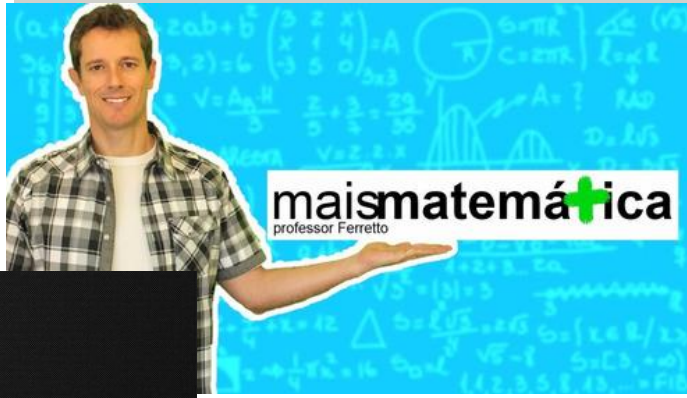


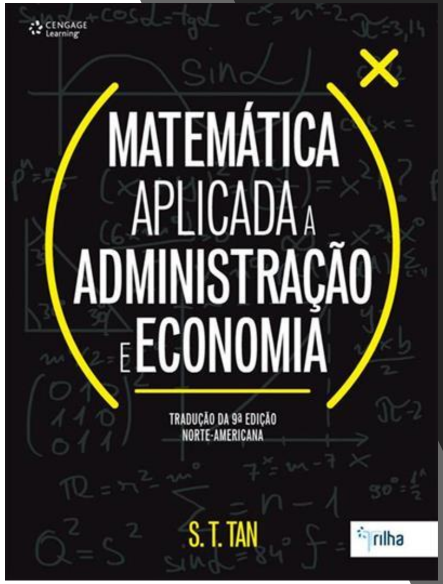
RCC-0218

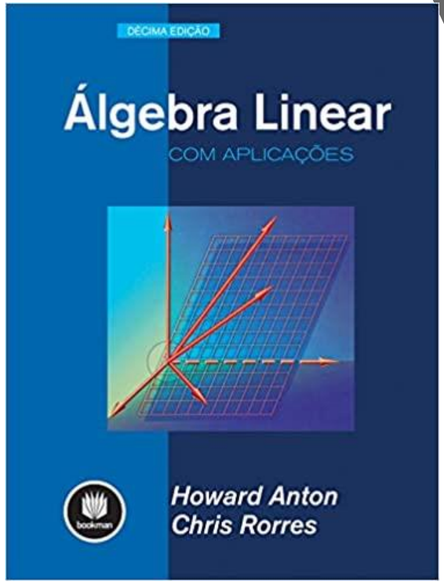
- Cálculo a uma variável
- O que veremos nesse curso?
  - **FUNÇÕES**
  - Limites
  - Taxas de variação
  - Análise gráfica de funções
  - Cálculo de áreas determinadas por gráficos de funções
  - Mas também.. Álgebra Linear

RCC-0218

- O que precisamos ter sob domínio?
  - Conjuntos numéricos e suas relações
  - Álgebra de polinômios
  - Equações e inequações
  - Potenciação/Radiciação/Fatoração
  - Exponenciais e logaritmos





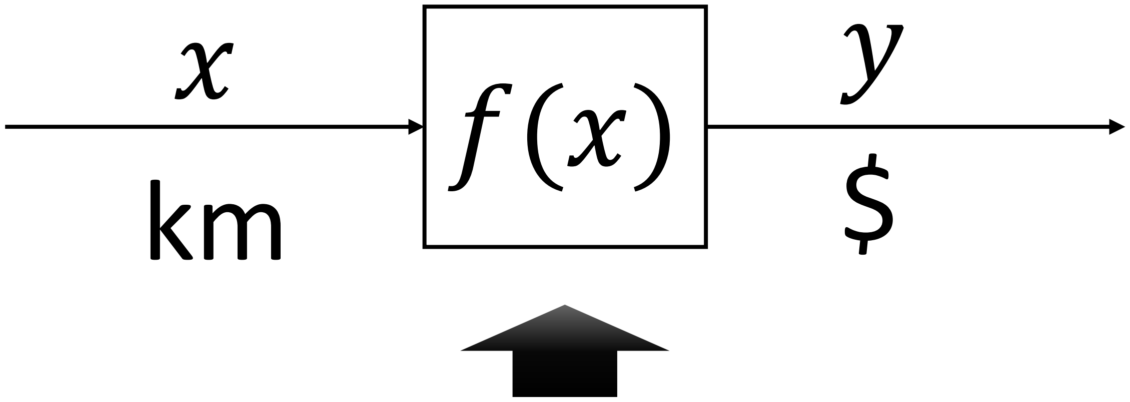


RCC-0218

- Aulas presenciais, video aulas e aulas por video síncronas
- Livros:
  - TAN, S. T. **Matemática aplicada à administração e economia** (tradução da 9ª edição norte-americana). São Paulo: Cengage Learning, 2014.
  - Anton, H.; Rorres, C. Álgebra Linear com Aplicações (10ª edição). Bookman, Porto Alegre, 2012
- Habituem-se a buscar outros exercícios e suas resoluções em outras fontes!!!!!

Conceitos Iniciais

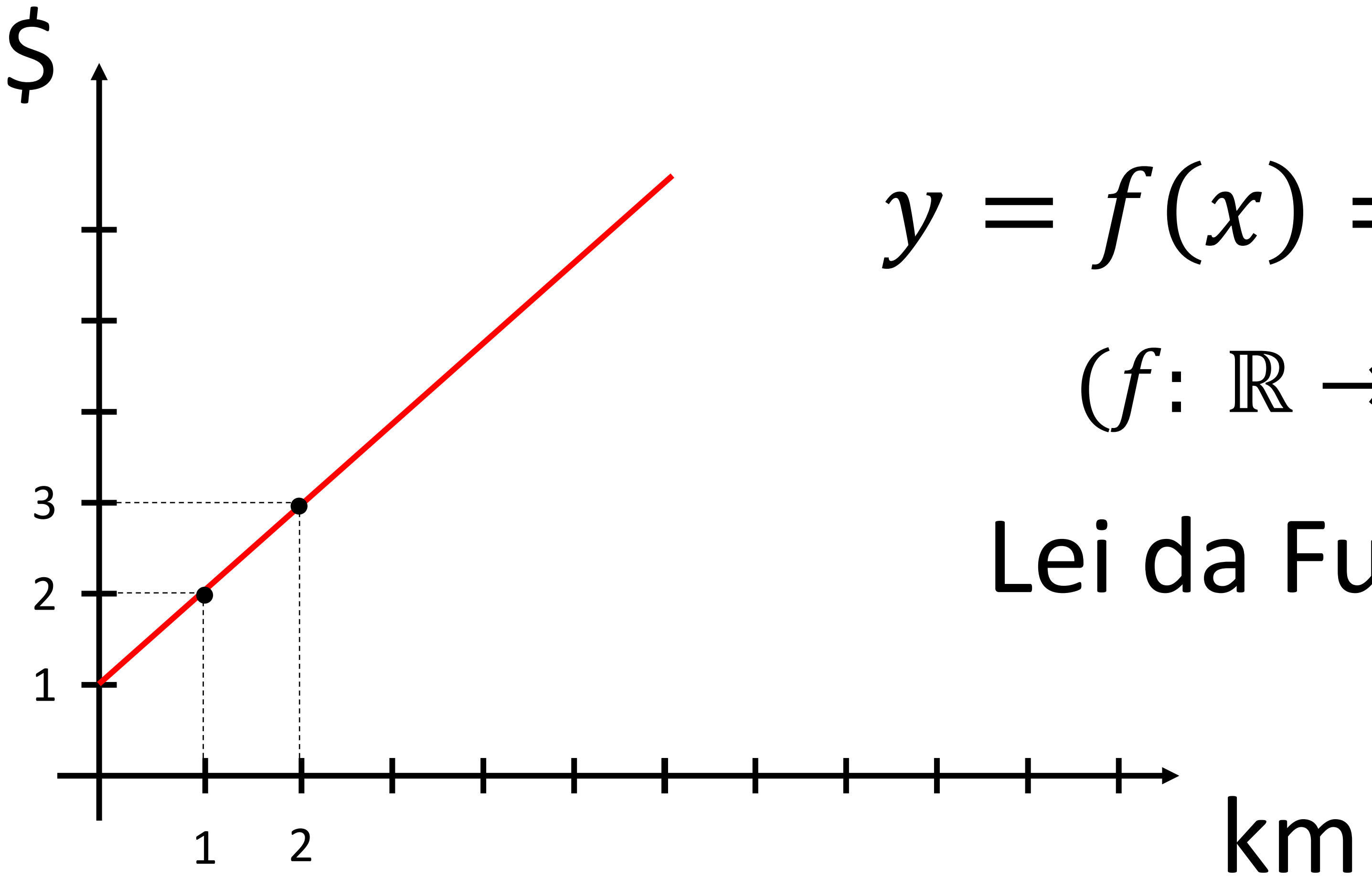
Taxi/Uber



$$y = f(x)$$

Lei ou regra que transforma ordenadamente uma coisa em outra

Conceitos Iniciais



$$y = f(x) = x + 1$$

$$(f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

Lei da Função

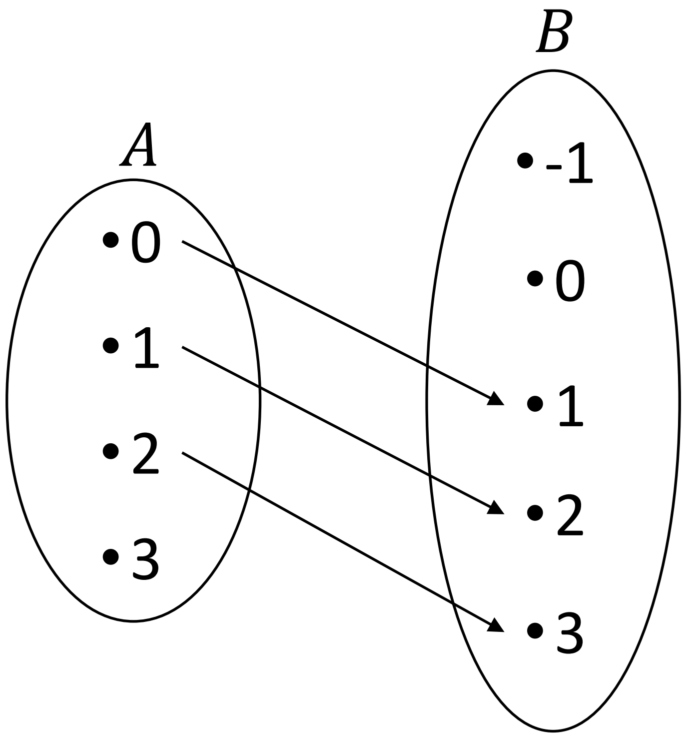
Um passo atrás... Relações!

- Dados dois conjuntos...

$$A = \{0,1,2,3\}$$

$$B = \{-1,0,1,2,3\}$$

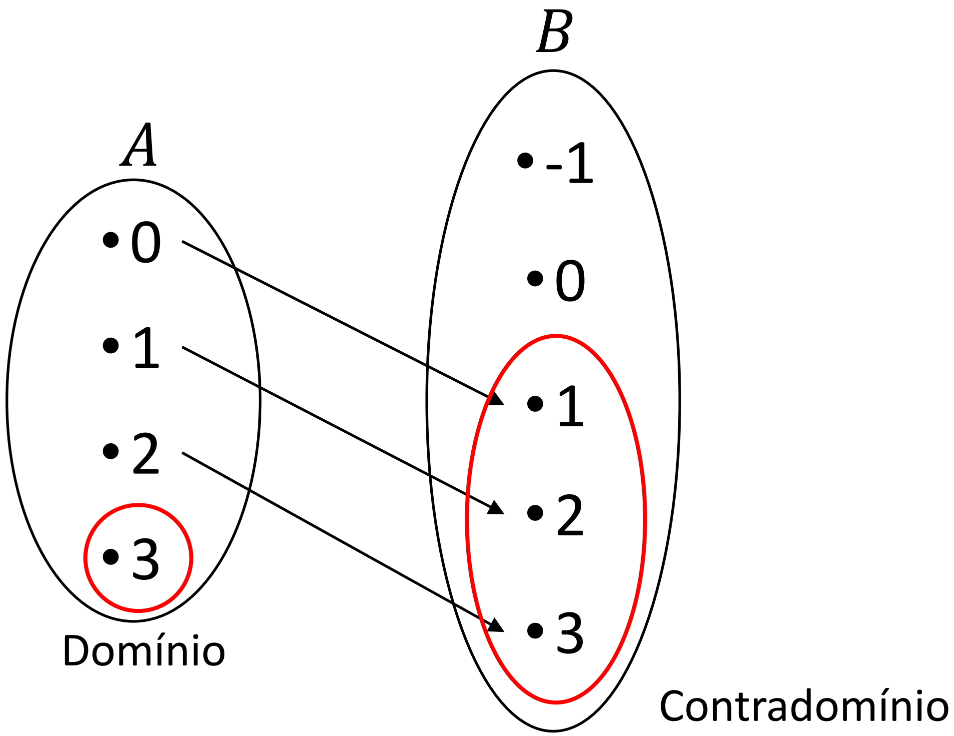
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ e \ y \in B\}$$



- Associe cada elemento de A ao seu sucessor imediato em B
- Formalmente: $R = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\}$
- Aqui nós temos uma relação! Mas seria essa relação uma função?

Um passo atrás... Relações!

- **Funções são um tipo particular de relação:**
  - Regra que associa **cada** elemento do conjunto A a um **único** elemento do conjunto B
  - Temos uma função em $A \times B$?
- O conjunto "origem" é o **Domínio**
- O conjunto "destino" é o **Contradomínio**
- Os elementos do Contradomínio com equivalentes no Domínio formam o conjunto **Imagem**
- **No caso, um dos elementos do domínio não tem imagem...**



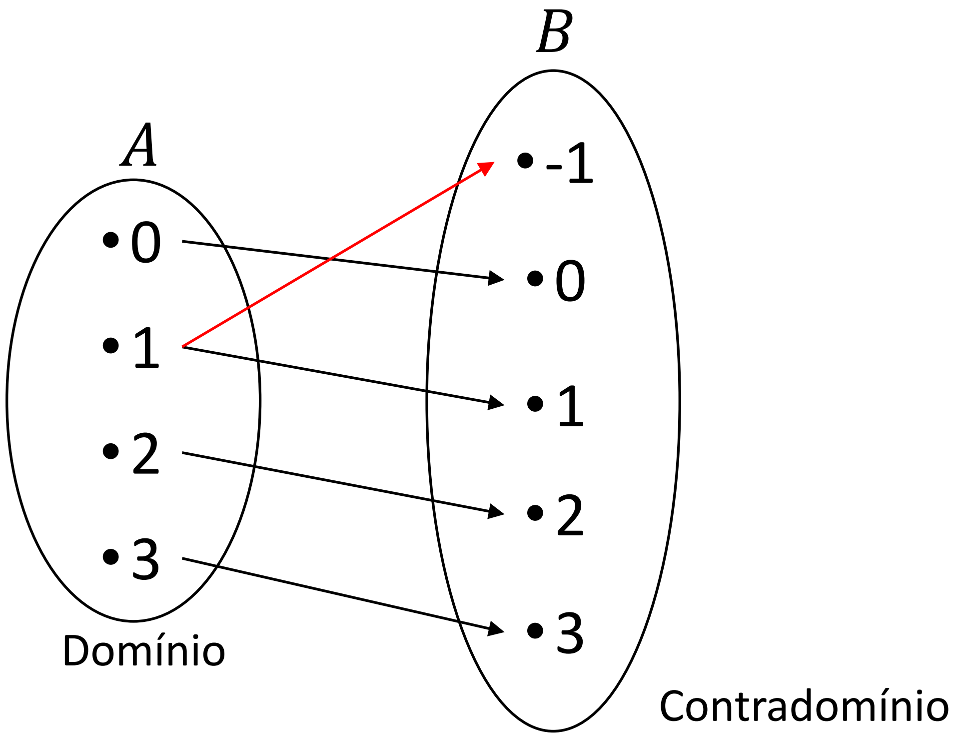
FUNÇÃO!?!?

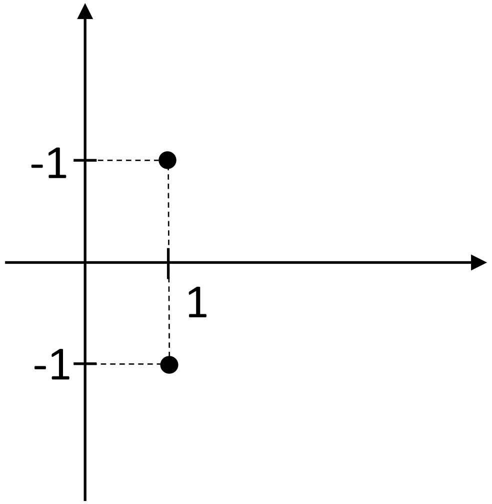
Um passo atrás... Relações!

- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B | \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{x^2}\}$$

- Cada elemento do Domínio só pode ter uma única Imagem
- Só poder sair uma única flecha de cada elemento do Domínio!!!!!
- Logo, a **relação** proposta não é uma função
- Em suma... Nem toda relação entre conjuntos é uma função!!!!!!





Mas... E as funções?

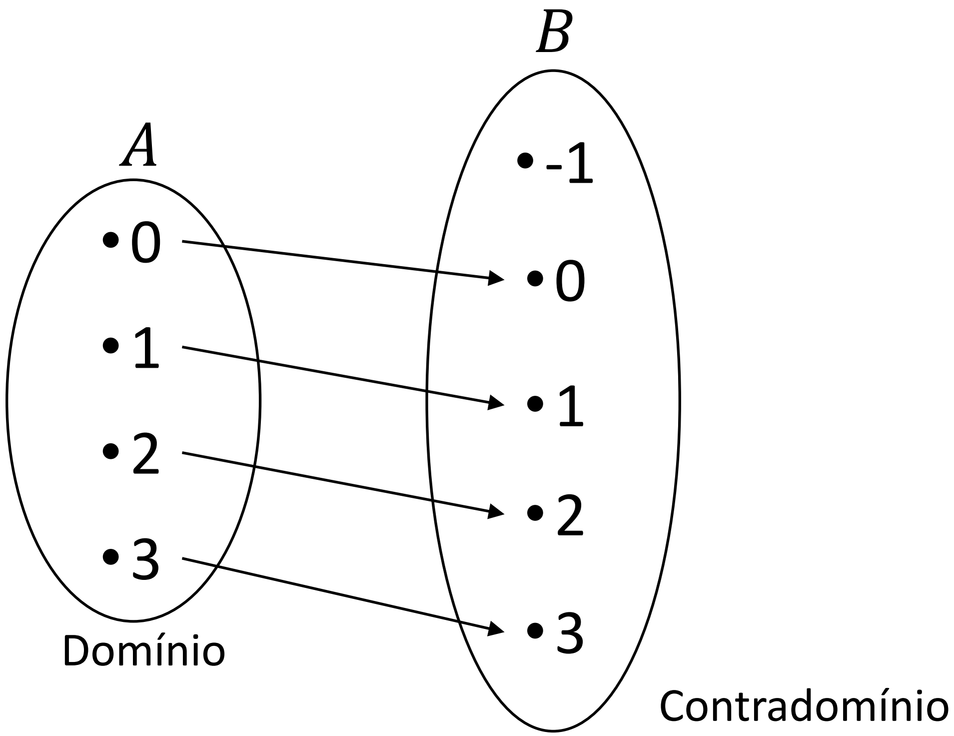
- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\}$$

$$D = A$$

$$CD = B$$

$$Im = \{0, 1, 2, 3\}$$



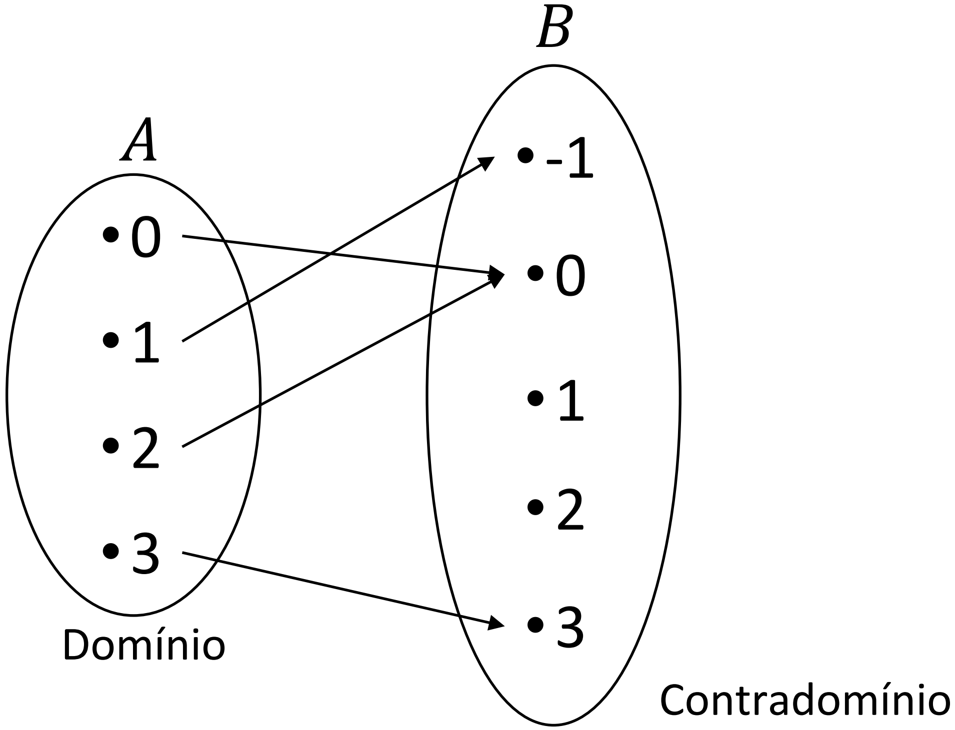
Temos uma função aqui!!!

Mas... E as funções?

- Usando o mesmo conjunto...

$$R = \{(x, y) \in A \times B | \boldsymbol{y = x^2 - 2x}\}$$

x	$y = x^2 - 2x$
0	0
1	-1
2	0
3	3



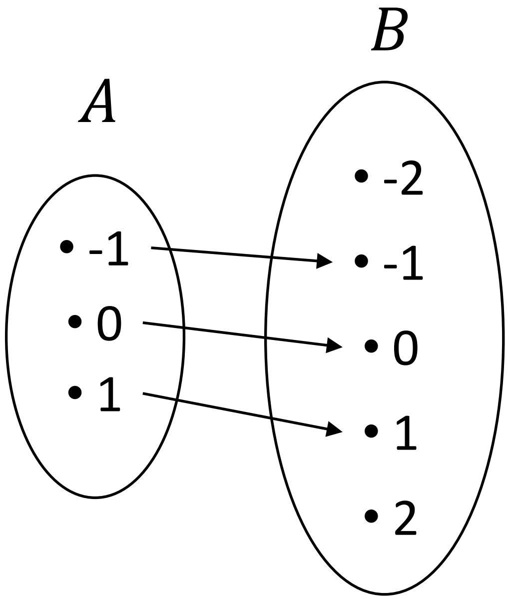
Aqui também!!!

Mas... E as funções?

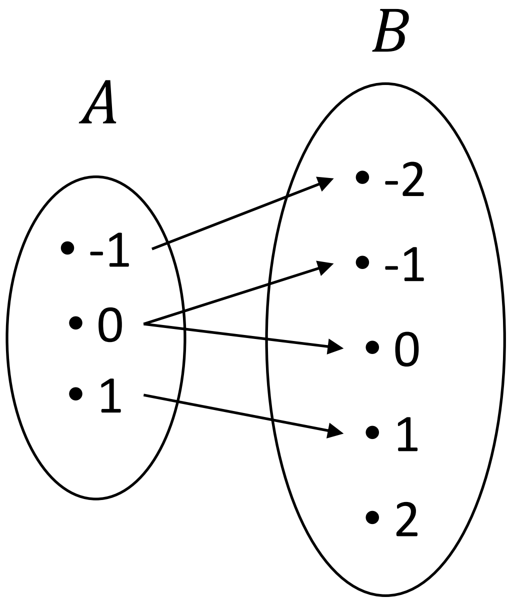
- Em resumo...
- Se x e y estão relacionados pela função $y = f(x)$ ...
  - Conjunto de todas as entradas **permitidas** (x) é chamado “domínio de $\boldsymbol{f(x)}$”
  - O conjunto de todas as saídas (y) que **resultam** quando x varia sobre o domínio é denominado “imagem de $\boldsymbol{f(x)}$”
  - A imagem é um suconjunto do Contra-Domínio

Funções

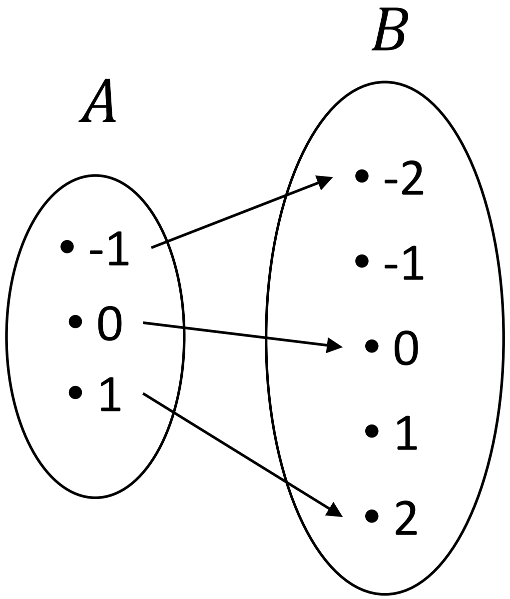
- Indique a lei de formação das funções abaixo, se é que são funções…



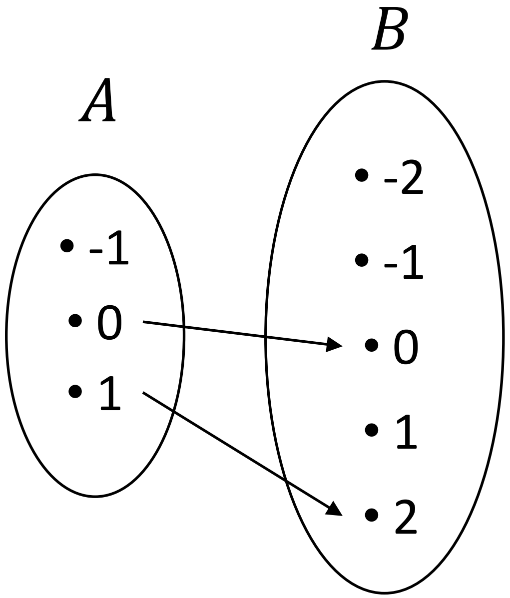
$f(x) = x$



$Não\ é\ função$



$f(x) = 2x$



$Não\ é\ função$

Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- A própria fórmula pode impor restrições ao domínio
  - Por exemplo, $y = \frac{1}{x}$ ($x = 0$ não é uma entrada válida)
- **Também aspectos físicos ou geométricos podem impor restrições sobre as entradas permissíveis de uma função**
  - Se y é o volume de um cubo perfeito, tem-se a função $y = x^3$
  - Os comprimentos devem ser números não negativos ($\boldsymbol{x \geq 0}$)
- Não havendo restrições, subentende-se que o domínio da função é todo o conjunto $\mathbb{R}$
  - Ex.: funções polinomiais do tipo $y = x^2$, $y = x^3$, e assim por diante

Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

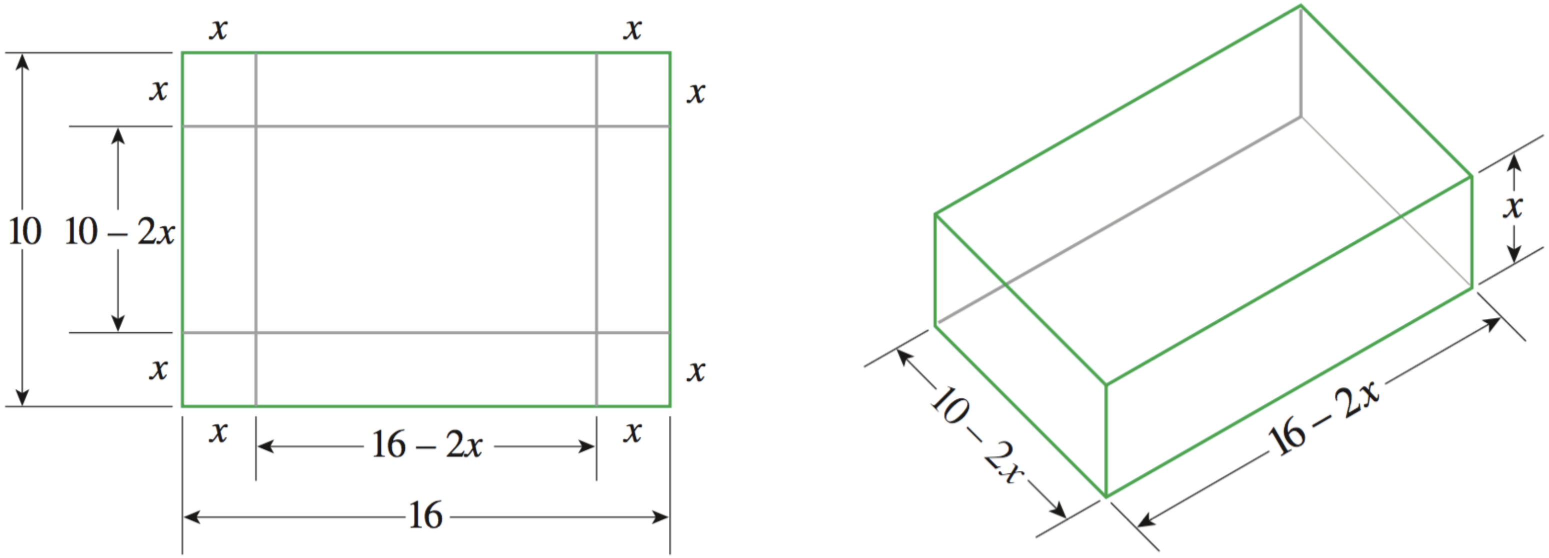
- Encontre o domínio natural de

  - $f(x) = x^3$
  - $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$
  - $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
  - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}}$

Symbolab
Scientific Equation Search

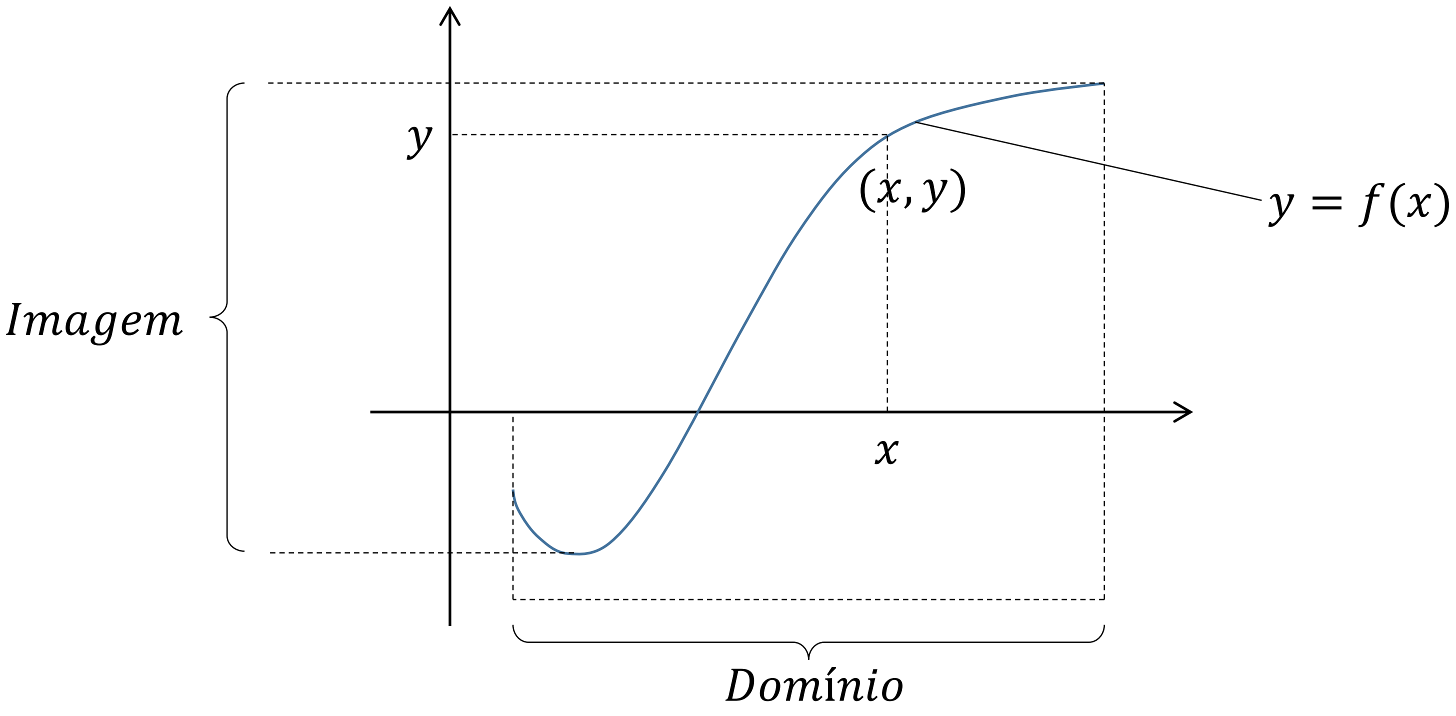
Um pouco mais sobre Domínio e Imagem

- Desejamos construir uma caixa com uma folha retangular de 16 x 10 recortando quadrados de x por x das extremidades desta folha.
  - Desenvolva a expressão que representa o volume da caixa
  - Qual é o domínio desta função?



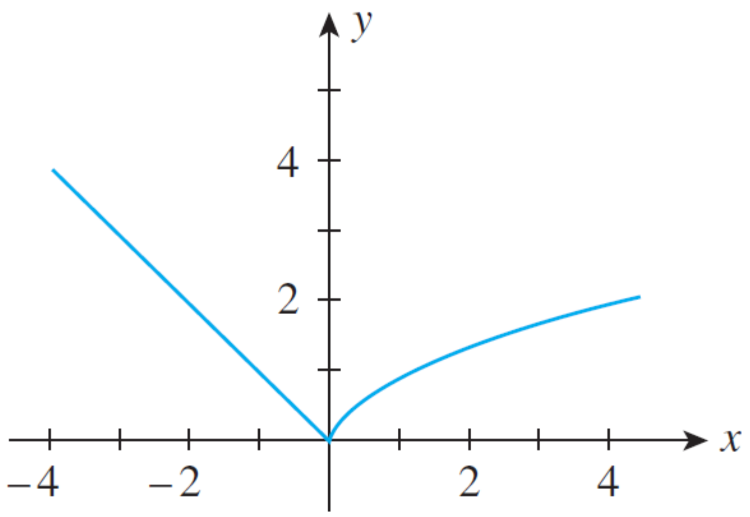
Gráficos de Funções

- Conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tal que x está no domínio da função e $y = f(x)$



Gráficos de Funções

- Agora, esboce o gráfico da função
  - $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$



Funções Definidas por Partes

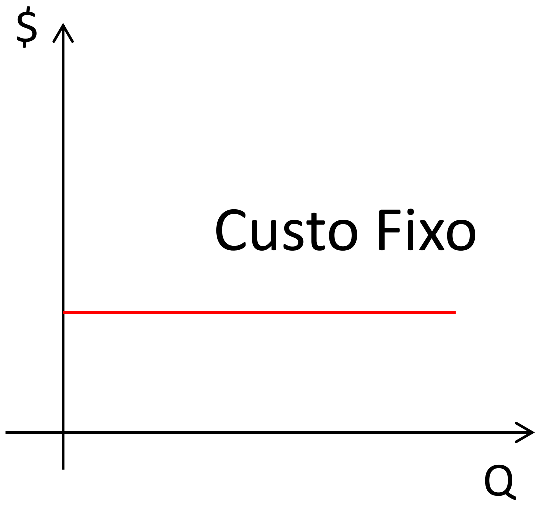
- Salário fixo mais comissão: um vendedor recebe salário fixo de $1.000 se vender até 50 unidades
- Acima de 50 unidades, ele recebe os mesmos $1.000 acrescidos de uma comissão de $3,00/unidade
- Formule a função e esboce seu gráfico

Álgebra de Funções

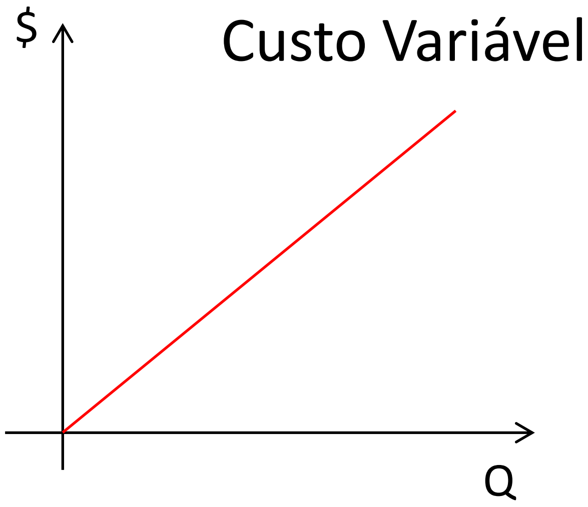
- Como visto no slide anterior, funções mais complexas resultam da composição de funções mais simples
- $f(x) = x^2 + 1$ pode ser entendida como soma de duas funções
- Podemos ter...
  - $(f + g)(x)$
  - $(f - g)(x)$
  - $(f.g)(x)$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \qquad (com\ g(x) \neq 0)$

Álgebra de Funções

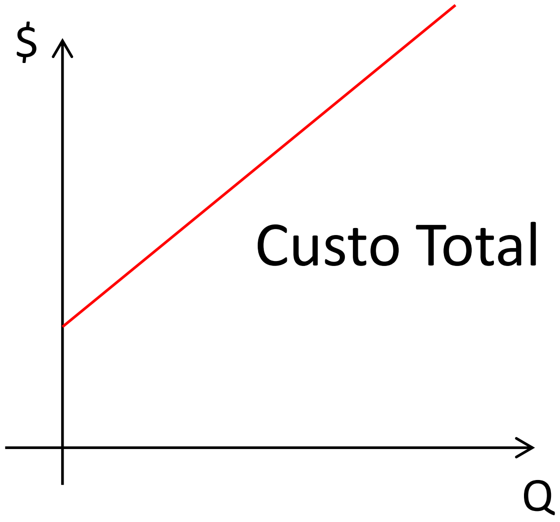
- Exemplo clássico
  - Custos fixos e variáveis



$$f(x) = CF$$



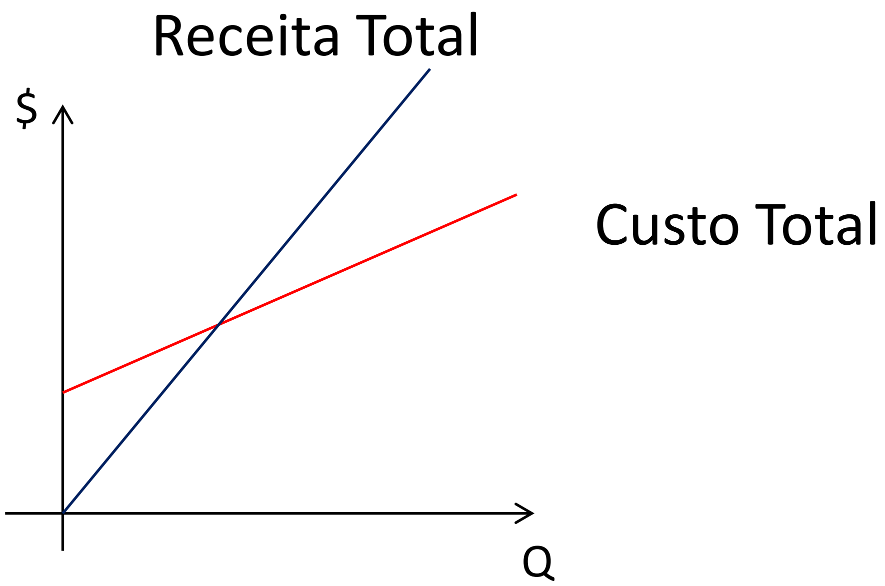
$$g(x) = CV_u \times Q$$



$$(f + g)(x) = CF + (CV_{un} \times Q)$$

Álgebra de Funções

- Exemplo clássico
  - Podemos ter ainda...



$$(f - g)(x) = L(x)$$

Álgebra de Funções

- Exemplo aplicado
  - $CF = 10.000/mês$
  - $CV = -0,0001x^2 + 10x \ (0 \leq x \leq 40.000)$
  - Determine a função custo total

  - Suponha que a função receita dada por $R(x) = -0,0005x^2 + 20x(0 \leq x \leq 40.000)$
  - Determine a função lucro
  - Apure o lucro para uma produção de 10.000 unidades/mês
  - Apure o lucro para uma produção de 50.000 unidades/mês

Composição de Funções

- Alguns problemas reais:
  - Apurar a quantidade de CO_2 em um determinado período do dia, dada a quantidade de carros em circulação
    - $\boldsymbol{CO_2(\#\ carros\ (horário))}$
  - A quantidade de pessoas empregadas, dado o número de lançamentos imobiliários no estado efetuados por causa do MCMV
    - $\boldsymbol{Desemprego(\#\ lançamentos(\$\ destinado\ ao\ MCMV))}$
  - Um modelo que relacionasse esforço, produtividade e resultado financeiro
    - $\boldsymbol{Resultado(produtividade(esforço))}$

Composição de Funções

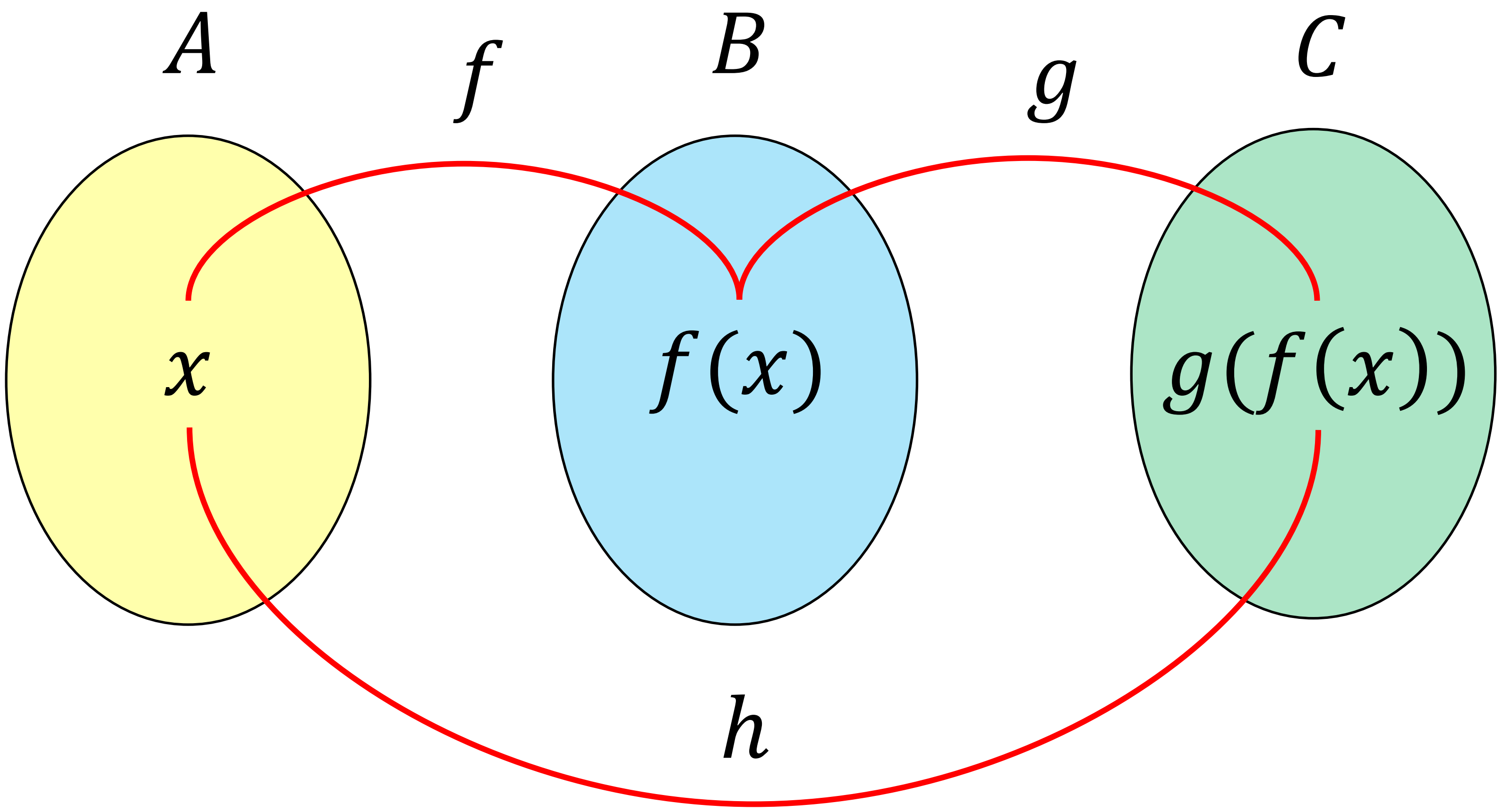
- Sejam duas funções...
  - $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ **e** $\boldsymbol{f: B \rightarrow C}$

Contradomínio **Domínio**

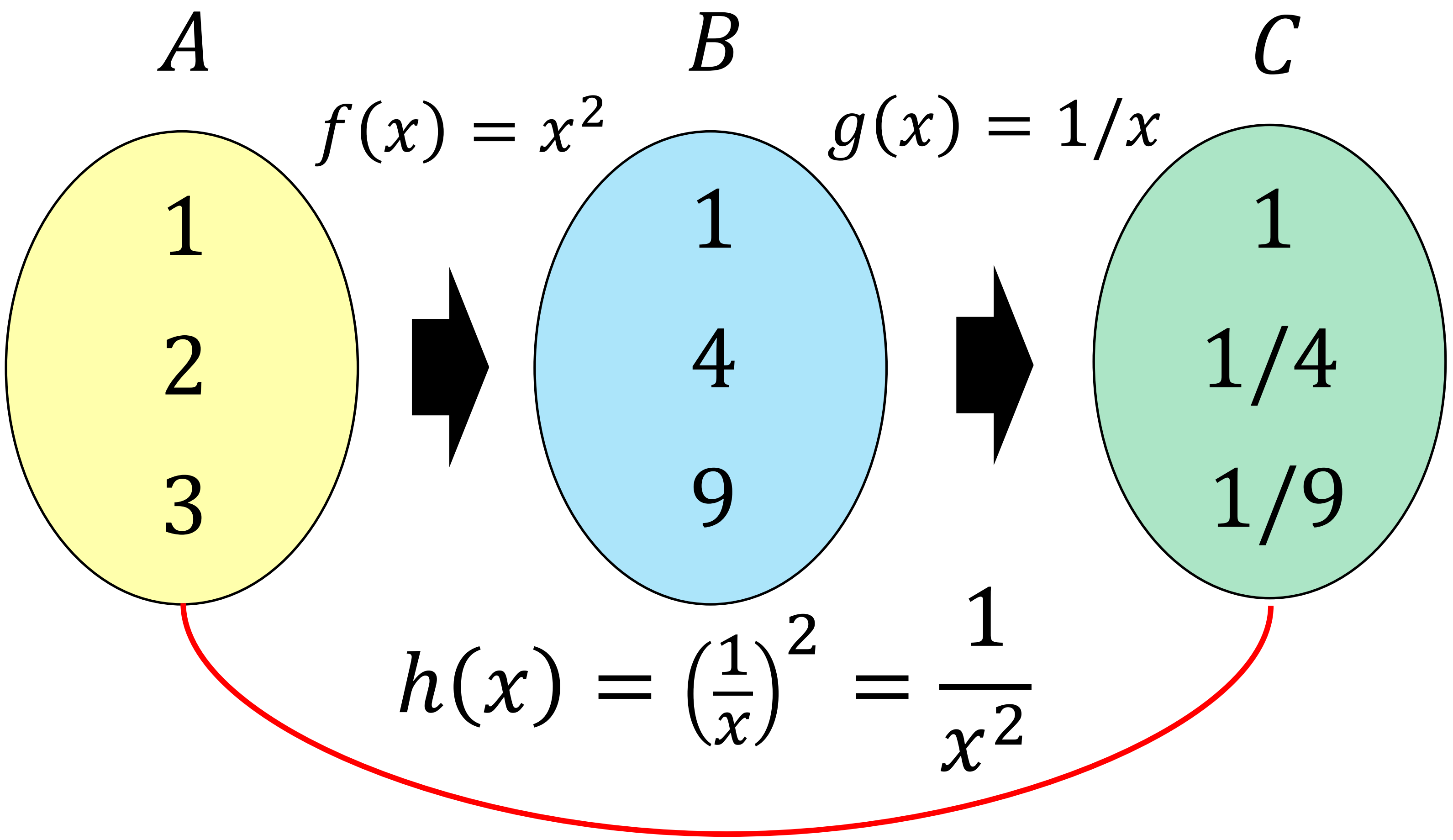
- A função composta de g e f é a função $\boldsymbol{f: A \rightarrow C}$ em que a imagem de cada $x \in A$ é obtida da seguinte forma
  - A função f é aplicada em x para obter $f(x)$
  - A função g é aplicada em $f(x)$ para obter $g(f(x))$

- Assim , $h(x) = g(f(x)) = gof(x), \forall\, x \in A$

Composição de Funções



Composição de Funções



Importante: a ordem importa!!!!! $\boldsymbol{h(x) = g(f(x)) \neq f(g(x))}$

Composição de Funções

- Ache gof e fog para
  - $f(x) = x^2 + x + 1;\ g(x) = x^2$
  - $f(x) = 2\sqrt{x} + 3;\ g(x) = x^2 + 1$

- Sabendo que $h = gof$, encontre as funções f e g
  - $h(x) = (2x^3 + x^2 + 1)^5$
  - $h(x) = \frac{1}{(3x^2+2)^{3/2}}$

Composição de Funções

- Um cuidado...
  - $f(x) = x^2 - 1$

x	$f(x) = x^2 - 1$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

Se $g(x) = \sqrt{x}$, verifique a imagem de $g(f(x))$ ...

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Nem tudo que está definido no domínio da função componente o está para a função composta

Composição de Funções

- Exemplo aplicado
  - Taxa de ocupação de um Hotel: $r(t) = \frac{10}{81}t^3 - \frac{10}{3}t^2 + \frac{200}{9}t + 55 \ (0 \leq t \leq 12)$
  - t medido em meses ($t = 0$ equivale ao início de janeiro)
  - r é o percentual de ocupação

  - Faturamento (em $mil): $R(r) = -\frac{3}{5000}r^3 + \frac{9}{50}r^2 \ (0 \leq r \leq 100)$

  - Determine a taxa de ocupação do hotel no início de janeiro? E no fim de junho?
  - Qual o faturamento do hotel nos mesmos períodos?

Composição de Funções

- Exercício
  - Um estudo de impacto ambiental em uma cidade indica que a quantidade de CO presente no ar decorrente da poluição de automóveis é de $0{,}01q^{2/3}$ PPM para q mil automóveis em circulação
  - Um estudo distinto estima que daqui a t anos o numero de veículos nessa cidade será de $0{,}2t^2 + 4t + 64$

  - Encontre uma expressão para a concentração de CO no ar por causa da emissão por automóveis daqui a t anos
  - Qual será o nível de concentração daqui a 5 anos?

Composição de Funções

- Exercício

- A receita de uma agência de viagens é de $f(x)$ reais, onde x é o montante de reais investido em publicidade
- O total gasto com publicidade no tempo t é de $g(t)$ reais

- O que $f_o g$ representa?

Funções Polinomiais

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + ax + a_0 \; (a_n \neq 0)$
  - Com $\boldsymbol{n}$ inteiro e não negativo
  - E $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ são constantes chamadas de coeficientes

- Por exemplo
  - $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + \frac{3}{x} + 8 \; (\text{funçã}o\ polinomial\ de\ grau\ 5)$
  - Assim como $g(x) = 3x + 4$ é uma função polinomial de grau 1 (ou função linear ou função afim)

Funções Polinomiais – Casos Especiais

- Função de 1º grau

$$f(x) = ax + b$$

Coeficiente Angular
(constante em funções afins)

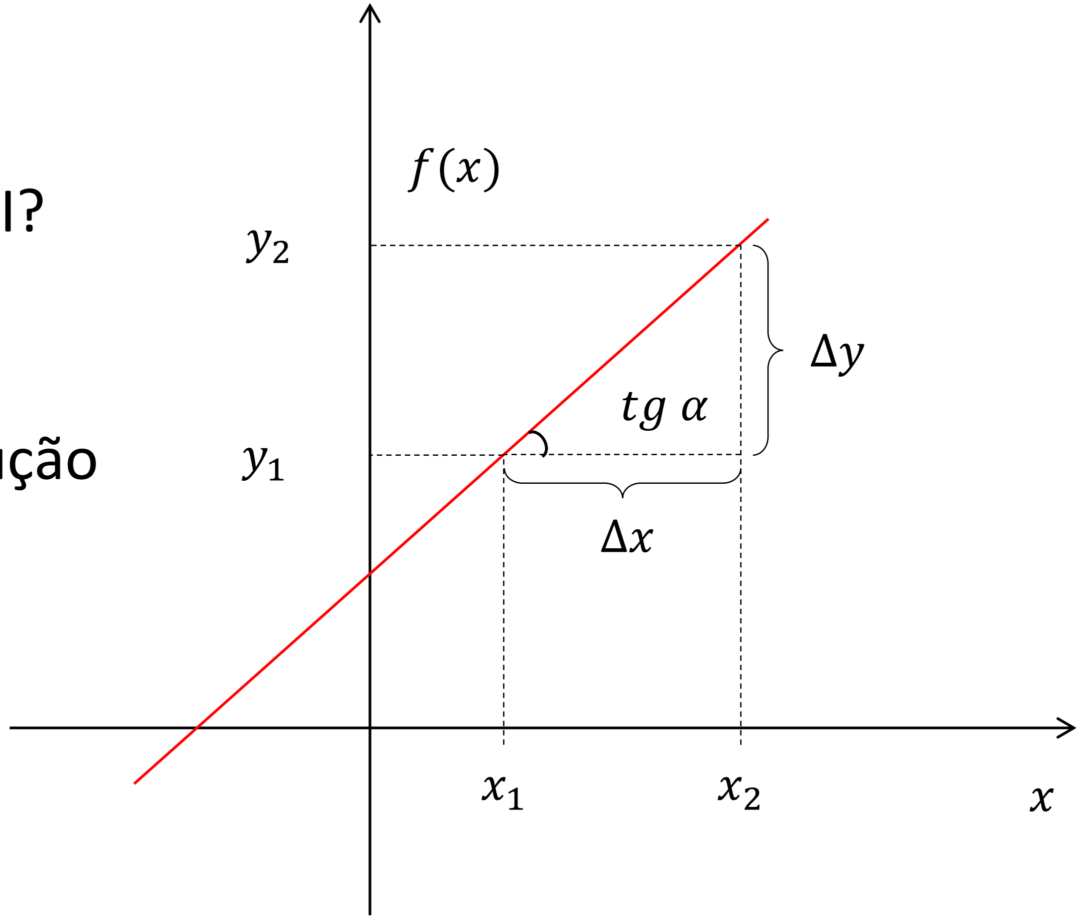
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$

- Pode-se determinar $f(x) = ax + b$ conhecendo dois de seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$

Funções Polinomiais – Casos Especiais

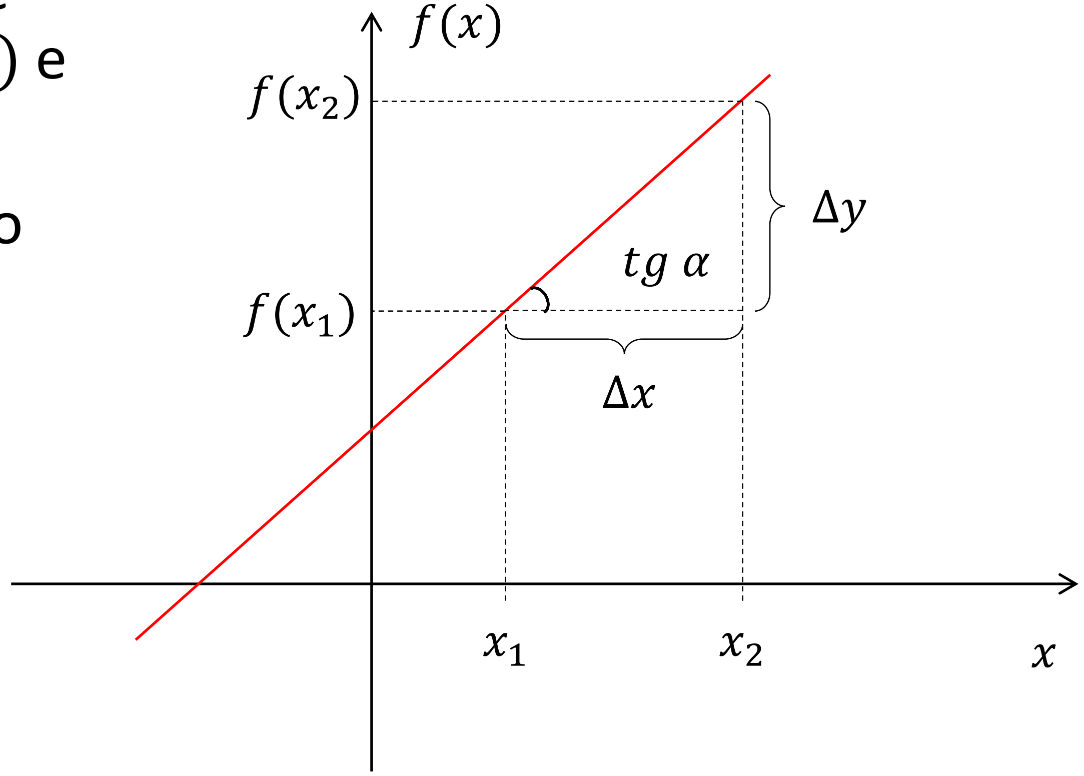
- Função de 1º grau
  - Qual a variação da VD ante a variação da VI?

  - Distância em função do tempo
  - Custo total em função do volume de produção
  - Etc...



Exemplos

- Sendo L_1 a reta que passa pelos pontos $(-2,9)$ e $(1,3)$ e L_2 a reta que passa pelos pontos $(-4,10)$ e $(3,-4)$, determine se ambas são paralelas
- Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1,3)$ e tem inclicção $m = 2$



$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

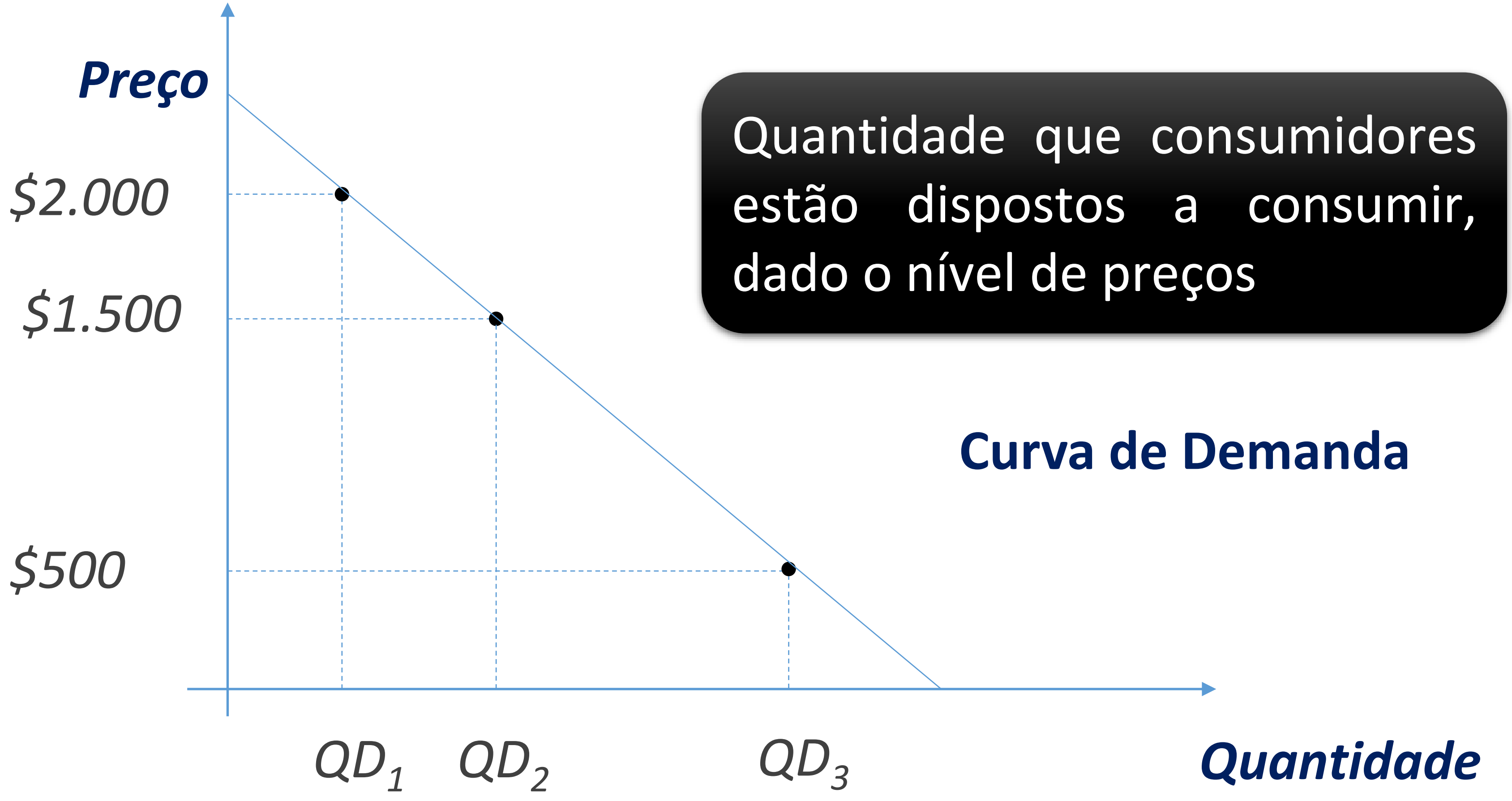
Algumas Aplicações – funções de 1º grau

- Depreciação linear – consumo da vida útil de um ativo
  - Ex. O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo. Sabe-se que hoje ela vale $ 10.000 e daqui a cinco anos valerá $ 1.000
    - Qual o valor da máquina daqui a t anos?
    - Qual o tempo necessário para a depreciação total?
    - Esboce o gráfico da função depreciação?

Algumas Aplicações – funções de 1º grau

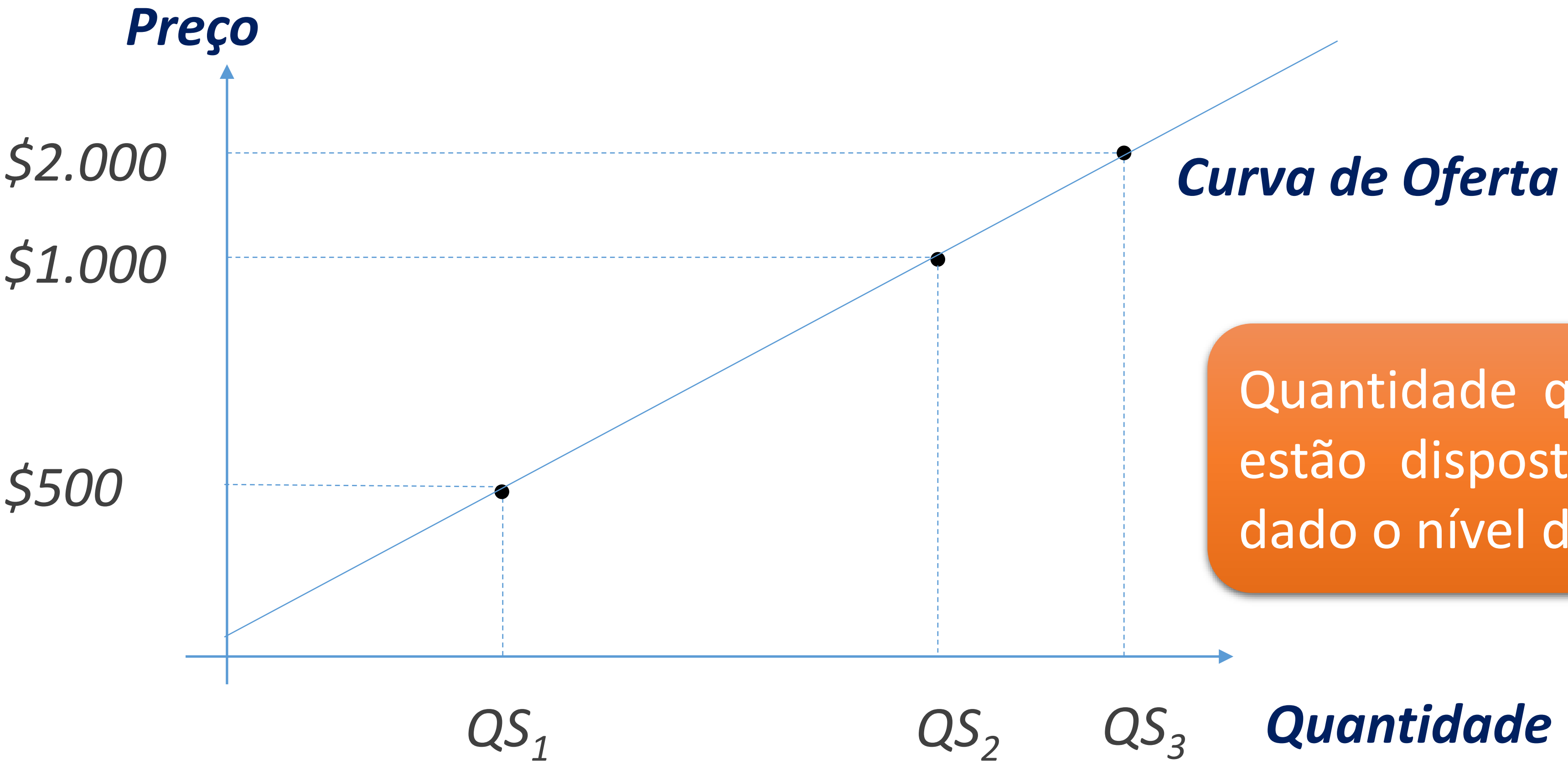
- Ponto de Equilíbrio
  - $RT = CT$
- Exemplo: o custo fixo mensal de fabricação de um produto é \$ 5.000 e o custo variável por unidade é \$ 10. O produto é vendido por \$ 15
  - Qual é o ponto de equilíbrio?
  - Esboce o gráfico indicando o ponto de equilíbrio

Curva de Demanda



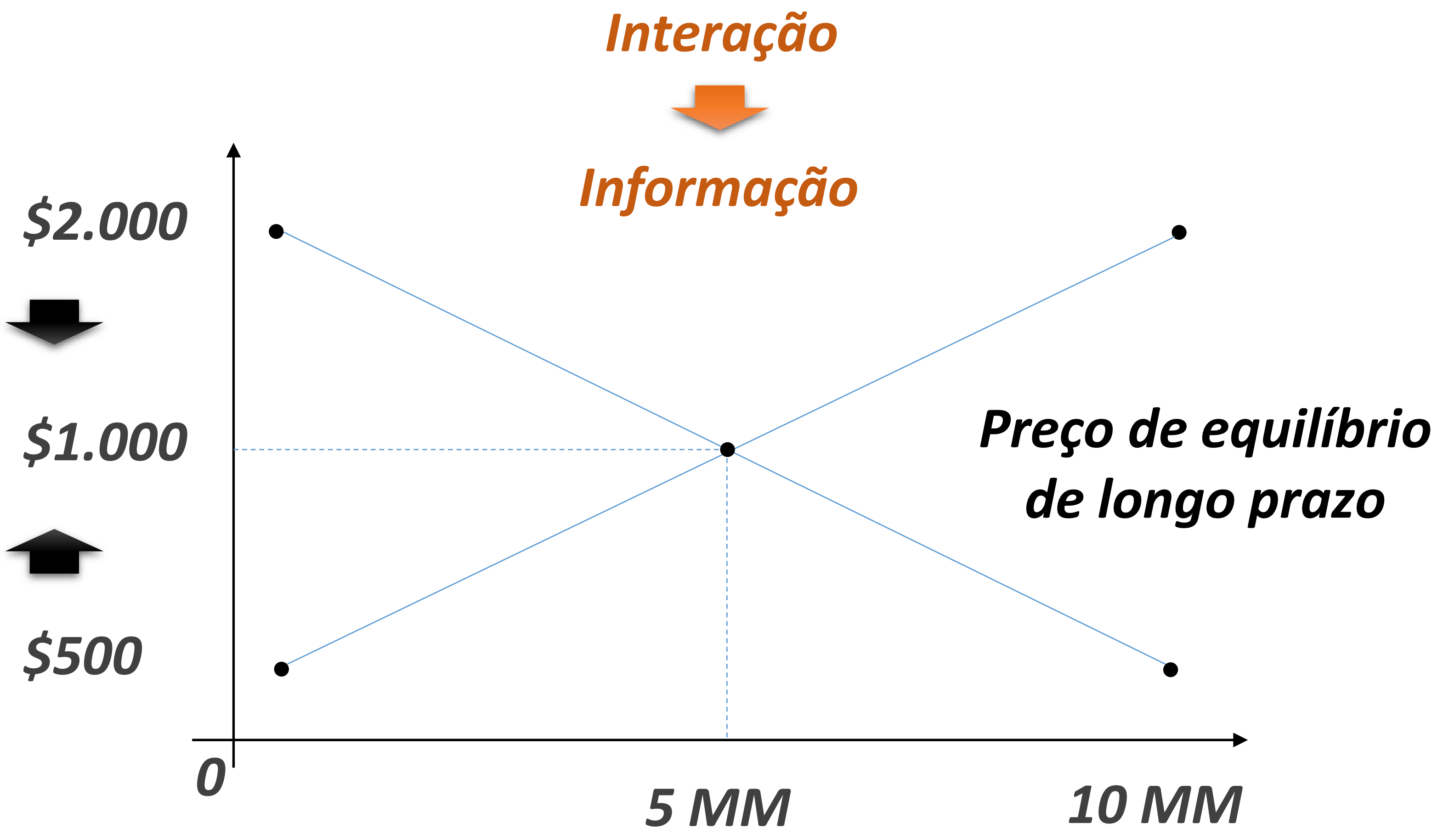
Quantidade que consumidores estão dispostos a consumir, dado o nível de preços

Curva de Oferta



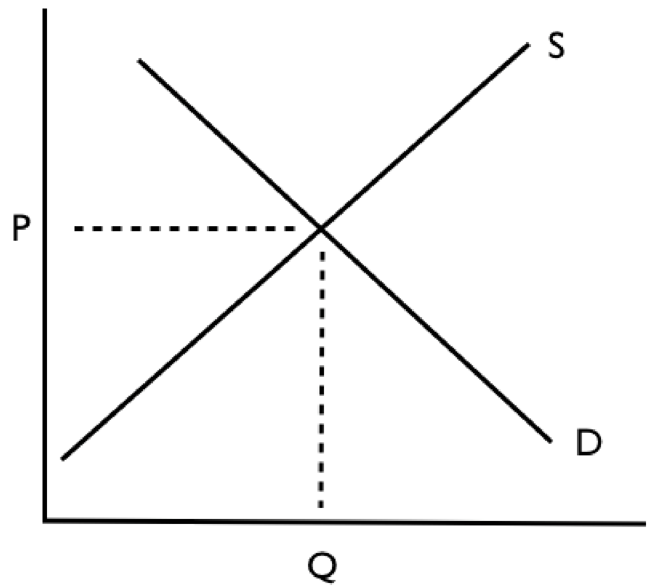
Quantidade que produtores estão dispostos a produzir, dado o nível de preços

Juntando tudo...



Por enquanto... funções de 1º grau

- Equilíbrio entre oferta e demanda
  - Demanda: quantidade consumida pelo mercado
  - Oferta: quantidade oferecida pelos produtores
- Vamos tratar o preço como uma função da quantidade
  - $p = d(q)$
  - $p = s(q)$



Algumas Aplicações – funções de 1º grau

- Exemplo: o volume demandado de sorvete varia com o preço na forma $p = d(q) = 10 - 0{,}002q$
- Suponha a função de oferta seja de 1º grau...
  - Se o preço for \$ 2,10, a quantidade ofertada será 350 unidades por semana
  - Se o preço for \$ 2,40, a quantidade ofertada será 1.400 unidades por semana
  - Ache a função oferta…

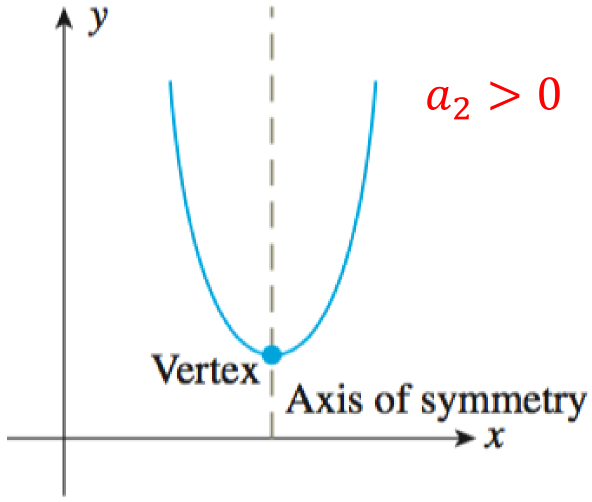
- Agora ache o *break even point* e esboce o gráfico indicando-o…

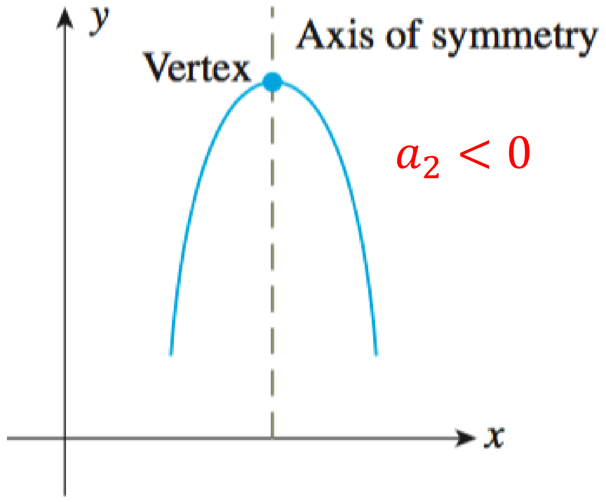
Exercício

- Um fabricante tem um custo fixo mensal de \$40.000. Além disso, cada unidade produzida equivale a um custo de \$8,00. O preço de venda de cada unidade é de \$12,00.
  - Ache as funções receita, custo e lucro.
  - Esboce o gráfico com as três funções
  - Qual o *breakeven point*?
  - Apure o lucro para a produção de 8.000 unidades e para 12.000 unidades

Funções Polinomiais – Casos Especiais

- Funções quadráticas são do tipo $f(x) = a_2x^2 + a_1x_1 + a_0 \ (a_n \neq 0)$
- Com $a_2 \in \mathbb{R}^*, a_1 \ \in \mathbb{R}, a_0 \ \in \mathbb{R}$





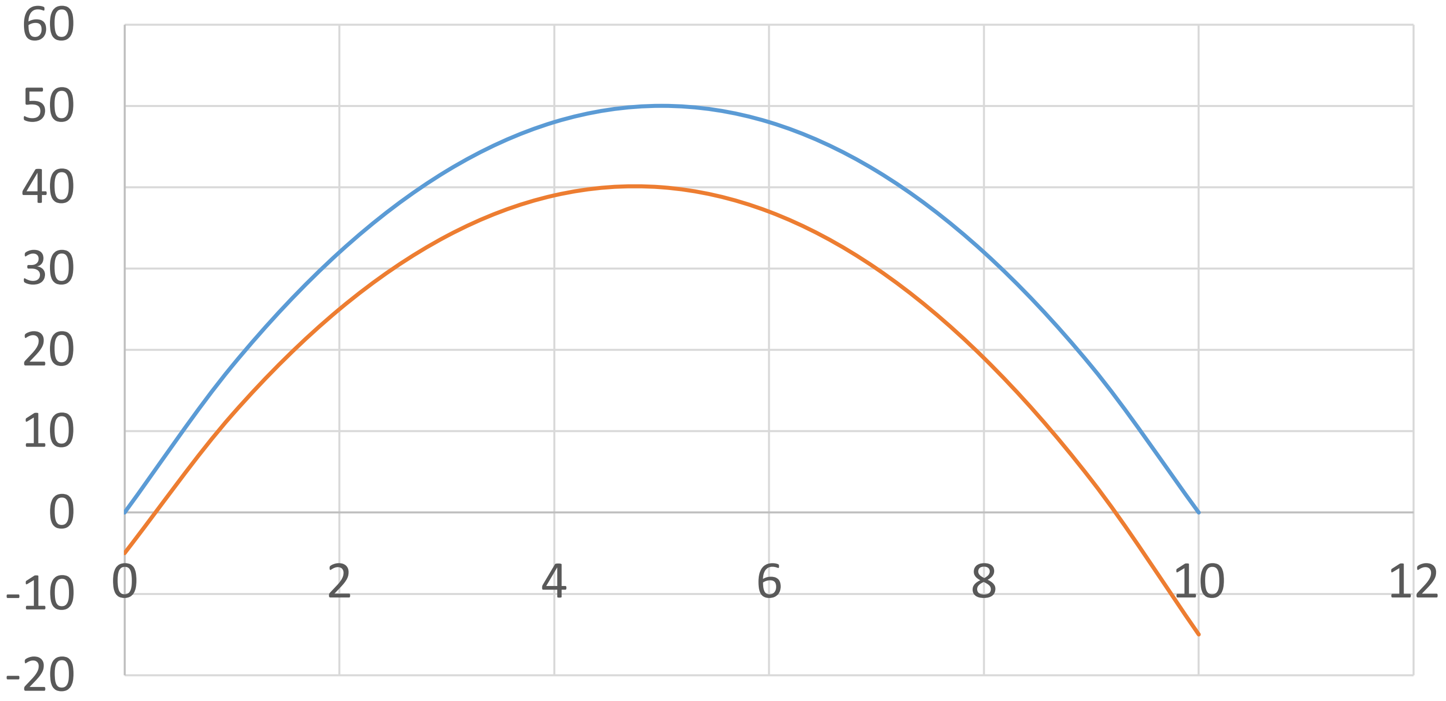
Algumas Aplicações – funções de 2º grau

- O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20t - t^2$, sendo que $0 \leq t \leq 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30N$.
  - Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora
  - Em que instante t de um dia de produção o custo será de $2.300 (em $\$1000$)

Algumas Aplicações – funções de 2º grau

- Vimos a função receita quando o preço era constante
- Agora veremos como obter a função receita com o preço variável (com consequente alteração da demanda)
- A demanda para um produto é $p = d(q) = 20 - 2q$, enquanto sua função custo $C = 5 + q$
  - Qual a quantidade que maximiza a Receita?
  - Qual a quantidade que maximiza o Lucro?

Graficamente...



Por que as funções receita e lucro poderiam ser parábolas?

Exercício

- A função demanda para uma certa marca de fone de ouvido sem fios e com *bluetooth* é dada por

$$p = d(q) = -0{,}025q^2 - 0{,}5q + 60$$

- Já a função de oferta correspondente é...

$$p = s(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}6q + 20$$

- p é expresso em US$ e q é medido em milhares de unidades
- Encontre a quantidade e o preço de equilíbrio

Funções Racionais

- $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{(x^2-4)^2}$ (com $x \neq 4$)

- Em outras palavras
  - $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (com $g(x) \neq 0$)

- Um cuidado...

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Funções Potência

Onde t é um $\mathbb{R}$ qualquer

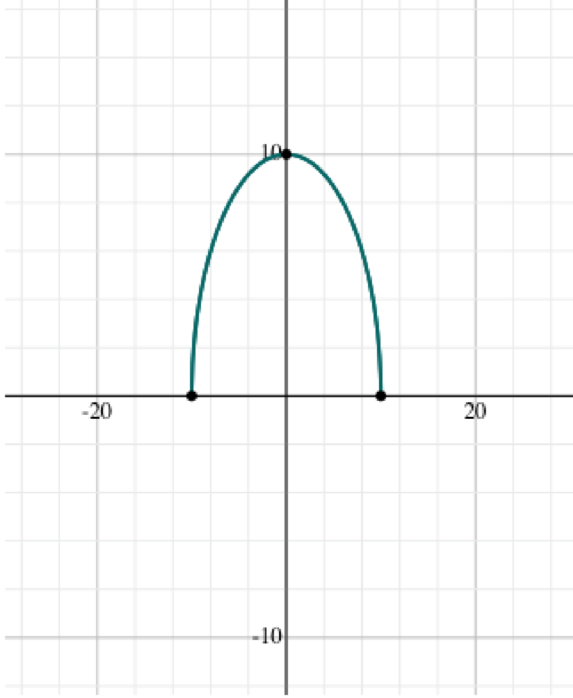
$$f(x) = x^t$$

- Por exemplo

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

A análise de destas funções (bem como polinômios de grau maior ou igual a 3) é facilitada pelas ferramentas do cálculo…

Exercícios



- Função demanda

$$p = \sqrt{-ax^2 + b}\ (a \geq 0, b \geq 0)$$

- Quando a demanda é de 6.000 unidades ($x = 6$), o preço é de $\$8$
- Quando a demanda é de 8.000 unidades ($x = 8$), o preço é de $\$6$

1. Determine a função demanda
2. Qual a demanda quando o preço é de $\$7{,}50$?