# AULA 8 — Ciência e Tecnologia do Vácuo

29/04/22

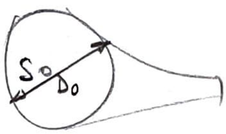
## - 2022 -

Passar lista de presença

Resumo da aula passada

Condutâncias no regime molecular ($\lambda \gg D$)

### (a) Vuvuzela




$$S = S_0 e^{-\beta x}$$

$$\boxed{C = \frac{4}{3} k \frac{\bar{v}}{\int_0^L \frac{B\,dl}{A^2}}}$$ Equação geral

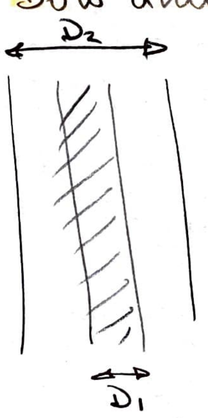
$$C = \frac{k \bar{v} \pi D_0^3 \beta}{8} \left[ e^{\frac{3}{2}\beta L} - 1 \right]^{-1}$$

Para $\beta \to 0$ tubo cilíndrico $H_2$ e $T = 293\,K$

$$\boxed{C = \frac{12{,}3}{L} D_0^3 \quad [l/s]}$$

$D$ (cm)
$L$ (cm)
$C$ ($l/s$)

### (b) Duto anular




$$\boxed{C = \frac{12K}{L} (D_2 - D_1)^2 (D_1 + D_2)}$$

Aproximação do prof. Helcio Onusic

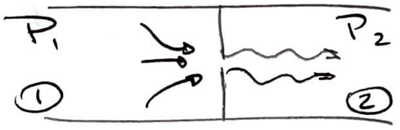
$$\boxed{C = \frac{12}{L} (D_2^3 - D_1^3)\left(1 - \frac{D_1}{D_2}\right)}$$

### (c) Resolução de exercícios

Condutâncias no Regime Viscoso $(\lambda << D)$ 

• colisões elásticas

## Condutância de um orifício




velocidades altas
$v \sim 1$ mach
$v \sim 340 m/s$

Hipóteses
1. $P_1 \sim atm$
2. $P_2 < P_1$
3. $\lambda$ é menor que as dimensões do orifício

- Nessas condições o gás flui do compartimento 1 para o 2
- O gás tem a menor seção transversal ao atravessar o orifício
- Depois dessa contração (compressão) o gás passa por várias contrações e expansões até finalmente se difundir na massa do gás em 2.

## Expansão adiabática

Expansões e contrações tão rápidas que não há transferência de calor.

$Q(\text{calor}) = 0$

Equação $\boxed{PV^\gamma = cte}$

$\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ $\begin{cases} c_p \text{ calor específico } P \text{ cte} \\ c_v \text{ calor específico } V \text{ cte} \end{cases}$

Variação térmica de uma substância ao receber certa quantidade de calor

$[J/kg\,K]$ $\left[\dfrac{cal}{g\,°C}\right]$

Num processo adiabático

$$\boxed{P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma}$$

Gases monoatômicos $c_v = \dfrac{3R}{2}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} C_v = 12{,}5 \dfrac{J}{mol\,K} & (He) \\ C_v = 20{,}0 \dfrac{J}{mol\,K} & (N_2) \end{cases}$

$\boxed{c_p - c_v = R}$

calor específico é a quantidade de calor necessária para aumentar em 1 grau 1 mol de moléculas $\begin{cases} c_v \text{ a volume cte} \\ c_p \text{ a pressão cte.} \end{cases}$

$$\boxed{Q = A P_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{R_0 T_1}{M} \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}} \quad (I)$$

No sistema CGS

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ , $R_0$ , M massa molar, $T_1$ temperatura

$P_1 \equiv$ pressão no compartimento (I)

Como $\boxed{Q = C \Delta P}$ , então:

$$C = \frac{9{,}13 A}{1 - (P_2/P_1)} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{T_1}{M}\right) \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}$$

A em $cm^2$ C (l/s) T (K) M (g)

Para ar 80% $N_2$ 20% $O_2$ M = 29 T = 293 K $\gamma = 1{,}4$

$$\boxed{C = \frac{76{,}6\, A}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}712} \left[ 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{0{,}288} \right]^{1/2}} \quad \text{(II)}$$

Para $P_1 = P_2$ $Q = 0$ | vide eq (I)

e será máximo para $\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \equiv r_c$

$r_c$ é um valor crítico

Para $T = 293K$ $\quad r_c = 0,525$

$$\boxed{Q_c = 20 A P_1}$$

$A\,(cm^2)$ $\quad P\,(Torr)$ $\quad Q\left(\frac{Torr\,\ell}{s}\right)$

Para $\frac{P_2}{P_1} \leq r_c$ $\longrightarrow$ Lembrando que $Q = C\Delta P$

$Q = C(P_1 - P_2)$

$C = \frac{Q}{P_1 - P_2} = \frac{20 A P_1}{P_1 - P_2}$

então
$$\boxed{C = \frac{20A}{1 - \frac{P_2}{P_1}}}$$

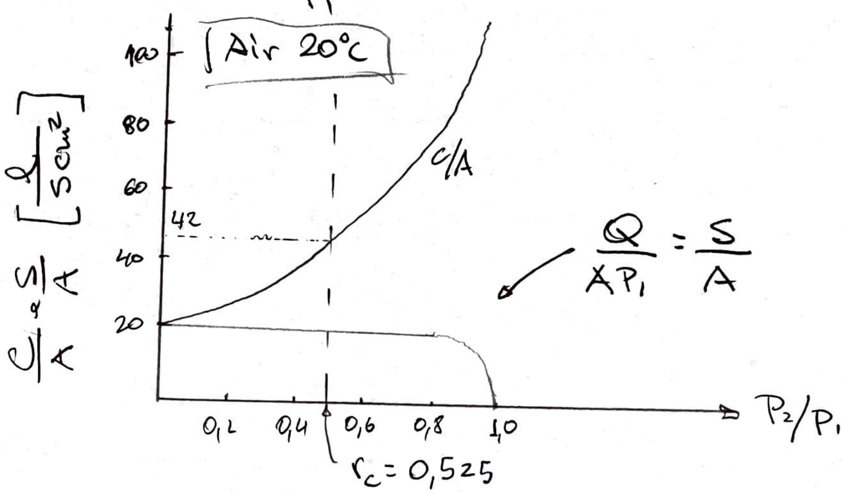
ou seja para $P_2 < 0,1 P_1$ ; $\frac{P_2}{P_1} < 0,1$

$$\boxed{C \sim 20A}$$

Velocidade de bombeamento (S) através de um orifício

$S = \frac{Q}{P} = \frac{C(P_1 - P_2)}{P_1} \Longrightarrow S = C\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$

SLIDE




$\frac{Q}{A P_1} = \frac{S}{A}$

$\frac{S}{A}$ é cte até $r_c$ e cai a zero para $P_1 \sim P_2$

$\frac{C}{A}$ tende a infinito para $P_1 \sim P_2$

# Regime Viscoso



6 Condutância de um tubo

Lei de Poiseuille

Em um tubo longo o fluxo acontece na região de alta pressão ($P_1$) para o de baixa pressão ($P_2$).

- O perfil da velocidade do fluxo de moléculas é constante.
- Não tem movimento turbulento
- A velocidade do fluxo de moléculas nas paredes é nulo!


forças viscosas

Supondo um pequeno cilindro de raio r em equilíbrio
⟹ Velocidade constante.

$$\boxed{P = F/A}$$

Forças atuando no cilindro:

1. Diferença de pressão $\equiv dP\,\pi r^2$
2. Força viscosa $\equiv$ oposta ao fluxo.

$$\boxed{F = -\eta A \frac{dv}{dr}} \qquad F = -\eta \underbrace{2\pi r\,dx}_{\text{Área de superfície do cilindro}} \frac{dv}{dr}$$

Igualando as duas forças:

$$-\eta\, 2\pi r\,dx \frac{dv}{dr} = dP\,\pi r^2$$

$$\boxed{-dv = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta} r\,dr}$$ integrando, temos:

$$-\int dv = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\int_0^r r\,dr \Rightarrow -v = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\frac{r^2}{2} + C$$

A constante C pode ser obtida das condições de contorno $v = 0$ para $r = R$

$$0 = \frac{dP}{dx}\frac{1}{2\eta}\frac{R^2}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\eta}$$

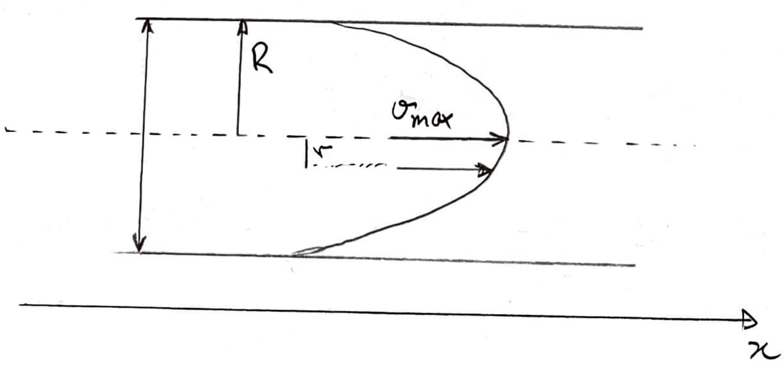
∴ O perfil da velocidade das moléculas, será:

$$\boxed{v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left(R^2 - r^2\right)}$$

O fluxo de gás (velocidades) vai na direção da queda da pressão.

Tem perfil parabólico

Distribuição das velocidades no regime viscoso



# Cálculo do Throughput (Q)



$$Q = P\frac{dV}{dt} \qquad dV = v\,dt\,dA$$

analise dimensional

$$\frac{cm}{s} * s \times cm^2 = cm^3$$

$$A = \pi R^2$$
$$dA = 2\pi r\,dr$$
$$\frac{dV}{dt} = v\,dA$$

substituindo na equação da distribuição de velocidades, temos:

$$v = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr$$

O volume total do gás fluindo através da seção reta do tubo por unidade de tempo é obtido integrando de $r=0$ a $r=R$.

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^R \frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}(R^2 r - r^3)\,dr = \frac{-2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2\pi}{4\eta}\frac{dP}{dx}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = -\frac{\pi}{8\eta}\frac{dP}{dx}R^4$$

então $\boxed{\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\pi}{8\eta}\dfrac{dP}{dx}R^4}$

Depende inversamente da viscosidade

Essa equação só tem sentido no regime viscoso!

$$Q = P\frac{dV}{dt} = P\left[\frac{-\pi}{8\eta} R^4 \frac{dP}{dx}\right]$$

$$\boxed{Q = \frac{-\pi}{8\eta} R^4 P\frac{dP}{dx}}$$

integrando de $P_1$ a $P_2$ e de 0 a L, vem:

Como não sabemos P(x), é feita uma estimativa da média do throughput ao longo do tubo.

$$\langle Q \rangle = \int_0^L \frac{Q\,dx}{L} = \frac{-\pi R^4}{8\eta L}\int_0^L P\frac{dP}{dx}\,dx$$

$$\langle Q \rangle = -\frac{\pi R^4}{8\eta L}\int_{P_1}^{P_2} P\,dP$$

$$\langle Q \rangle = -\frac{\pi R^4}{8\eta L}\left.\frac{P^2}{2}\right|_{P_1}^{P_2} = -\frac{\pi R^4}{16\eta L}\left(P_2^2 - P_1^2\right)$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{16\eta L}(P_2 - P_1)(P_2 + P_1)$$

definindo $\frac{P_1 + P_2}{2} = \bar{P}$

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{16\eta L}(P_1 - P_2)\,2\bar{P}}$$

Mas, $Q = C \Delta P$

então $\boxed{C = \frac{\pi R^4}{8 \eta L} \bar{P}}$

logo $\boxed{C = \frac{\pi D^4}{128 \eta L} \bar{P}}$ $D = 2R$

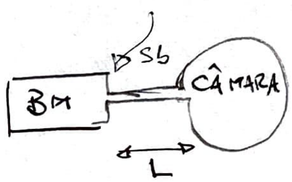
No regime viscoso a condutância depende da pressão.

Para $N_2$, $T = 293\,K$ e $\eta = 175\,\mu Poise$

$$\boxed{C_{N_2} \simeq \frac{180 D^4}{L} \bar{P}}$$ $P(Torr)$, $D(cm)$, $\bar{P} = \frac{P_1 + P_2}{2}$

—— / ——

Lista 2 - Ex.




$\begin{cases} S_b = 60\,\ell/min = 1\,\ell/s \\ L = 80\,cm \\ D = 1'' = 2{,}54\,cm \end{cases}$

Qual a velocidade de bombeamento efetiva (Sef)?

$N_2$ e $T = 300\,K$

(a) No Regime Molecular

$$C_{N_2} = \frac{12 D^3}{L} \ (\ell/s)$$

$$C_{N_2} = \frac{12 (2{,}5)^3}{80} = 2{,}3\,\ell/s$$

Lembrando $S_{ef} = \frac{S_b C}{S_b + C}$ $\longrightarrow$ $S_{ef} = \frac{1 \times 2{,}3}{1 + 2{,}3} = 0{,}7\,\ell/s$

ⓑ No Regime Viscoso

$$\boxed{C_{N_2\,viscoso} = \frac{180\,D^4\,\bar{P}}{L}}$$ Depende da Pressão

$$\begin{cases} DP \leqslant 10^{-2} \text{ cm Torr} \longrightarrow \text{Regime molecular} \\ DP \geqslant 1 \text{ cm. Torr} \longrightarrow \text{Regime viscoso} \end{cases}$$

$$C_{N_2\,viscoso} = \frac{180\,D^3\,D\bar{P}}{L} \qquad DP \geqslant 1 \quad \text{condição limite}$$

$$C_{N_2}\,\text{Viscoso} = \frac{180\,D^3 \times 1}{L} = \frac{180 \times (2{,}5)^3 \times 1}{80} = 35 \text{ l/s}$$

Neste caso: $S_{ef} = \dfrac{S_b\,C}{S_b + C} \sim S_b = 1 \text{ l/s}$

—/—

Comparação das condutâncias

$$\frac{C_{viscoso}}{C_{MOLECULAR}} = \frac{\dfrac{180\,\cancel{D^3}\,D\bar{P}}{\cancel{L}}}{\dfrac{12\,\cancel{D^3}}{\cancel{L}}} = 15$$

No início do bombeamento as condutâncias são ENORMES!!

ou seja, as impedâncias são pequenas.

# Condutâncias dependentes do gás



Regime viscoso

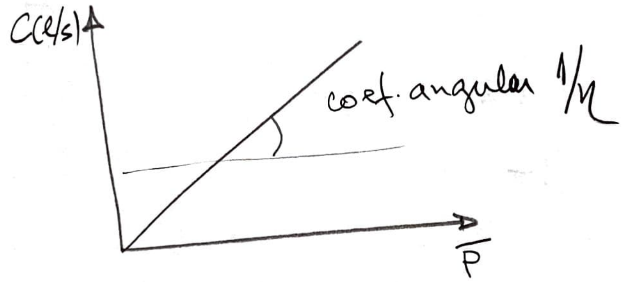
$$\boxed{C = \frac{1}{\eta}\,\frac{\pi D^4 \bar{P}}{128 L}}$$

gases diferentes = $\eta$ diferentes

Condutancia em função de $1/\eta$

$y = Ax$

$y = \frac{1}{\eta} x$




Pode-se extrair o valor da viscosidade do gás experimentalmente a partir dessa medida.

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \qquad n = \frac{P}{kT} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n \delta^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 P}$$

$$\boxed{\lambda = 2{,}3 \times 10^{-20} \frac{T}{\delta^2 P}} \; [\text{cm}]$$

Para T em K

$\delta$ em cm

P em Torr

CGS $\quad 1 \text{ Poise} = \frac{1\,g}{cm\,s} = \frac{dina\;s}{cm^2}$

SI $\quad 10 \text{ Poise} = \frac{1\,kg}{m\,s} = Pa\;s$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} = \frac{P}{\cancel{kT}}\,\frac{m}{2}\,\bar{v}\,\frac{\cancel{kT}}{\sqrt{2}\,\pi \delta^2 \cancel{P}} = \frac{m \bar{v}}{2\sqrt{2}\,\pi \delta^2}$$

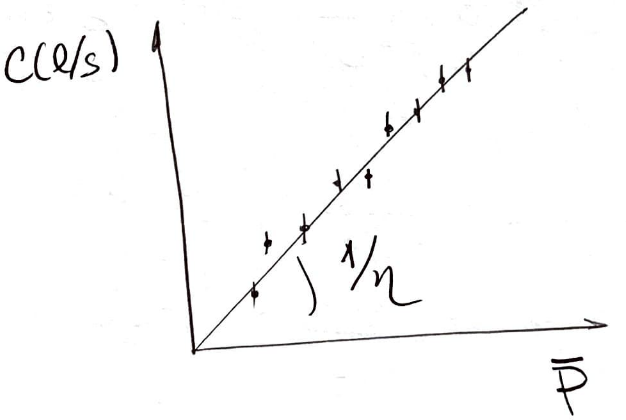
$$\eta = \frac{m \bar{v}}{2\sqrt{2}\,\pi \delta^2} \sim \frac{1}{\pi \delta^2}\sqrt{\frac{m k T}{\pi}}$$

$$\lambda = \frac{5 \times 10^{-3}}{P(\text{Torr})} \; [\text{cm}]$$

| gás | $\eta$ ($\mu$Poise a 20°C) | $C_{gás}/C_{N_2}$ |
|---|---|---|
| $N_2$ | 175 | 1,0 |
| $O_2$ | 203 | 0,86 |
| Ar | 182 | 0,96 |
| $H_2$ | 88 | 2 |
| He | 196 | 0,89 |
| $H_2O$ | 94 | 1,9 |

$$\boxed{C_{viscoso} = \frac{\pi}{128}\,\frac{D^4}{L}\,\frac{1}{\eta}\,\bar{P}}$$

É possível medir no laboratório




Proporcional ao inverso da viscosidade.

# Regime Intermediário



$$10^{-2} < D\bar{P} < 1$$

$$\boxed{C_I = C_V + \alpha C_m} \qquad f(x) = a + bx$$

$C_I$ = condutância no regime intermediário

$C_V$ = C no regime viscoso e $C_m$ é a condutância no regime molecular

$$\alpha = \frac{1 + \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}{1 + 1{,}24 \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{D\bar{P}}{\eta}}$$

$$\boxed{\eta \sim \lambda P \sqrt{\frac{2m}{\pi k T}}}$$

$$\eta = \frac{n m \bar{v} \lambda}{2} \ ; \quad n = \frac{P}{kT} \ ; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\eta = \frac{P}{kT} \frac{m\lambda}{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = P\lambda \sqrt{\frac{2m}{T k \pi}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + 1{,}25 \frac{D}{\bar{\lambda}}}{1 + 1{,}55 \frac{D}{\bar{\lambda}}}} \qquad \boxed{\bar{\lambda} = \frac{5 \times 10^{-3}}{\bar{P}(\text{Torr})} \ [\text{cm}]}$$

## Equação aproximada

$$\boxed{C_I = C_m \left(0{,}0736 \frac{D}{\bar{\lambda}} + 1\right)}$$