2021-1, "STATPHYS", AULA 03

OBJETIVOS: DISCUTIR BREVEMENTE CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

1.2 PROBABILIDADE "FORMAL"

A ANÁLISE COMBINATÓRIA PERMITE A CONSTRUÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES SIMPLES DE PROBABILIDADE QUANDO O NÚMERO DE POSSÍVEIS "EVENTOS" É FINITO E TAIS EVENTOS TÊM O MESMO "PESO". A PROBABILIDADE DE QUALQUER EVENTO "COMPOSTO" É ENTÃO DEFINIDA COMO O QUOCIENTE ENTRE O NÚMERO DE EVENTOS "FAVORÁVEIS" (A UMA DADA PROPOSIÇÃO) E O NÚMERO TOTAL DE EVENTOS.

EMBORA ESSA IDEIA SIMPLES APAREÇA DE FORMA MARCANTE NA FÍSICA ESTATÍSTICA DE EQUILÍBRIO MEDIANTE O POSTULADO DAS PROBABILIDADES IGUAIS A PRIORI, NÃO É POSSÍVEL DISCUTIR PROBABILIDADE SEM FERRAMENTAS PARA CONSIDERARMOS DIFERENTES "PESOS" PARA OS EVENTOS E, PRINCIPALMENTE, QUANTIDADES NÃO ENUMERÁVEIS DE EVENTOS (CONTÍNUO!).

* ESPAÇO DE PROBABILIDADE

TRIPLA: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

• ESPAÇO AMOSTRAL Ω: CONJUNTO DE TODOS OS POSSÍVEIS RESULTADOS DE UM "EXPERIMENTO ALEATÓRIO",

OS EVENTOS ELEMENTARES, $\omega \in \Omega$.

- ESPAÇO DE EVENTOS (OU σ-ÁLGEBRA) $\mathcal{F}$: COLEÇÃO DE SUBCONJUNTOS DE Ω, "TODAS AS PERGUNTAS RAZOÁVEIS E ANALITICAMENTE TRATÁVEIS"

→ CONJUNTOS MENSURÁVEIS

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$

→ UNIÕES ENUMERÁVEIS

* OBS: NOS CASOS FINITO E INFINITO ENUMERÁVEL, $\mathcal{F}$ "É" A COLEÇÃO DE TODOS OS SUBCONJUNTOS DE Ω. PORÉM, ISSO NÃO PODE OCORRER NO CASO INFINITO NÃO ENUMERÁVEL!!!

- (**MEDIDA DE**) **PROBABILIDADE** $\mathbb{P}$:

$$\mathcal{F} \ni \boxed{A \longmapsto \mathbb{P}(A)} \in [0,1]$$

(i) $\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) \geq 0$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) SE $\{A_i\}$ FOR UMA COLEÇÃO ENUMERÁVEL DE EVENTOS DISJUNTOS,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

AXIOMAS DE KOLMOGOROV

"RESQUÍCIO" DO PRINCÍPIO ADITIVO!

◇ EXEMPLO: NO EXPERIMENTO ALEATÓRIO "LANÇAR UMA MOEDA JUSTA ATÉ APARECER A 1ª COROA", O ESPAÇO AMOSTRAL É O CONJUNTO (NÃO ENUMERÁVEL!) DE TODAS AS SEQUÊNCIAS DE BERNOULLI

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, ONDE $\omega_i \in \{H, T\}$. $\diamond$

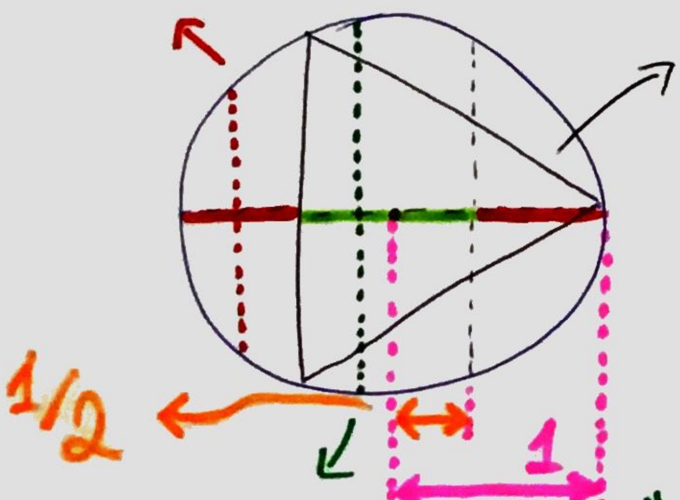
"HEAD", CARA — "TAIL", COROA

** PARADOXO DE BERTRAND

"DADO UM CÍRCULO DE RAIO <u>UNITÁRIO</u>, QUAL É A PROBABILIDADE DE UMA RETA ALEATÓRIA RESULTAR EM UMA CORDA DE COMPRIMENTO $\geq \sqrt{3}$?"

(a) VERTICAIS ALEATÓRIAS (ABSCISSAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS)

CORDA CURTA, "RUIM"

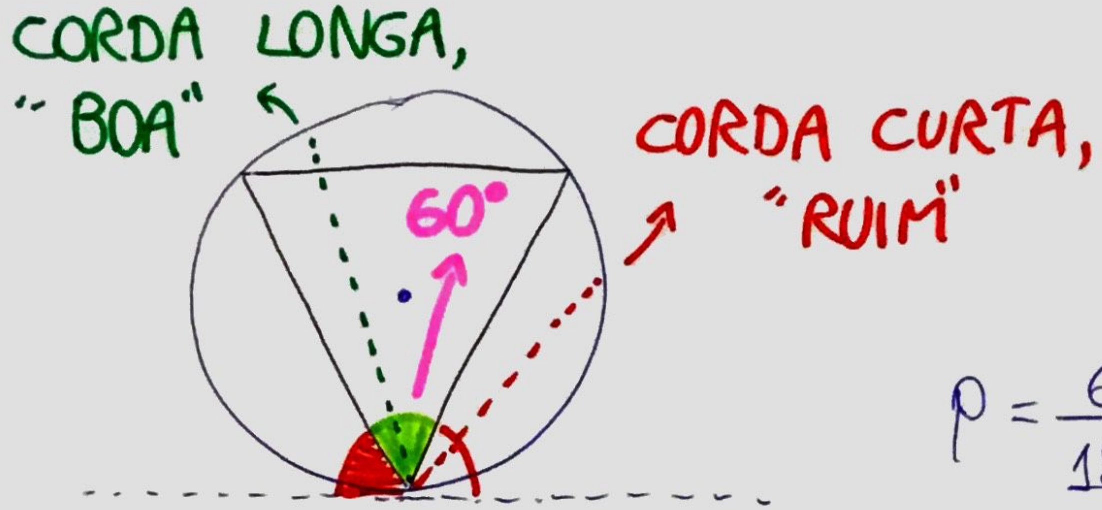


CORDA LONGA, "BOA"

TRIÂNGULO INSCRITO DE LADO $\sqrt{3}$

$$p = \frac{\text{SEGMENTO VERDE}}{\text{DIÂMETRO}} = \frac{1}{2}$$

(b) ÂNGULOS ALEATÓRIOS NO PIVÔ

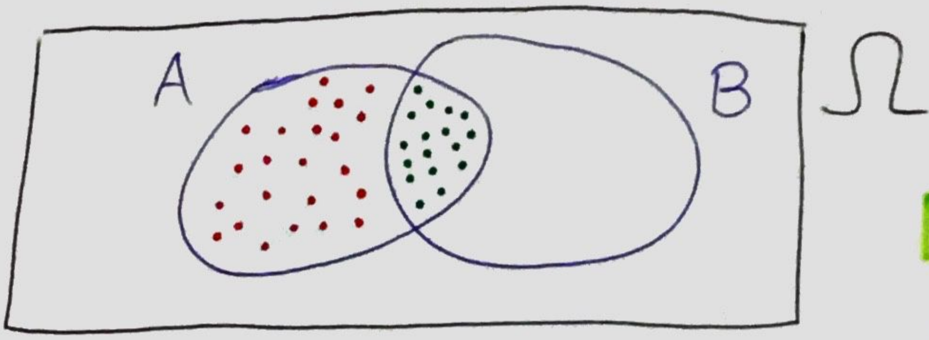


$$p = \frac{60°}{180°} = \frac{1}{3}$$

MORAL DA HISTÓRIA? PROBLEMA MAL POSTO, "RETA ALEATÓRIA" É SEM SENTIDO. UM SÓ $\mathcal{F}$, DOIS $\mathbb{P}$'s: $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$.

* PROBABILIDADE CONDICIONAL

É FUNDAMENTAL, MANTIDOS Ω E $\mathcal{F}$, CONSTRUIR UMA NOVA MEDIDA DE PROBABILIDADE $\mathbb{Q}$, A PARTIR DE $\mathbb{P}$, QUANDO HÁ "NOVA INFORMAÇÃO" DISPONÍVEL.



$\mathbb{P}(A,B)$

$$\mathbb{Q}(A) \rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A \mid B) \equiv \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

$\hookrightarrow \neq 0$

OBS. 1: EMBORA Ω SEJA "MANTIDO", O PROCEDIMENTO CORRESPONDE, NA PRÁTICA, A UMA <u>REDUÇÃO</u> <u>DO</u> <u>ESPAÇO</u> <u>AMOSTRAL</u>, $B \rightarrow \Omega'$.

OBS. 2: $\mathbb{P}(A, B) \neq \mathbb{P}(A \mid B)$

OBS. 3: $\mathbb{P}(A, B) \leq \mathbb{P}(A)$

◊ EXEMPLO: EM UM DADO USUAL, $\mathbb{P}(2, \text{PAR}) = \mathbb{P}(2) = 1/6$, ENQUANTO

$$\mathbb{P}(2 \mid \text{PAR}) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = \frac{\#\{2\}}{\#\{2,4,6\}}$$

◊

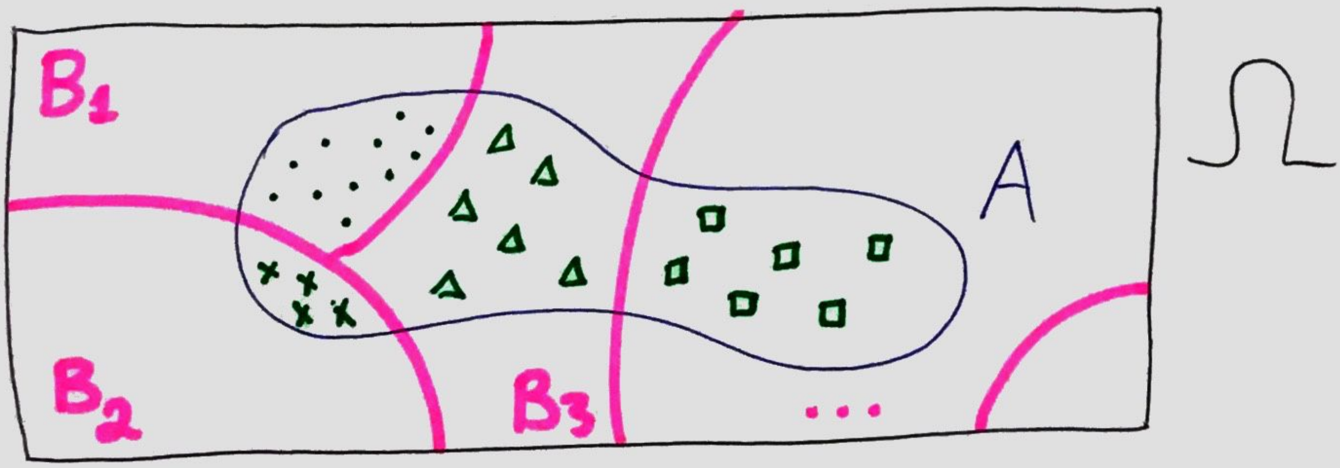
* LEI DA PROBABILIDADE TOTAL

SE $\bigcup_i B_i = \Omega$ E

$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}.$$

□ DEMONSTRAÇÃO:



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}\left[A \cap \left(\bigcup_i B_i\right)\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\bigcup_i (A \cap B_i)\right] = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) =$$

↓ TEORIA DE CONJUNTOS!

↙ UNIÃO ENUMERÁVEL DE DISJUNTOS

↓ CONDICIONAL

$$= \sum_i \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

□

* INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

$A, B \in \mathcal{F}$ SÃO INDEPENDENTES SE

$$\boxed{\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}.$$

EQUIVALENTEMENTE, SE $\mathbb{P}(B) \neq 0$,

$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)}$ SE A E B FOREM INDEPENDENTES.

OBS: EM GERAL, A E B DISJUNTOS NÃO SÃO INDEPENDENTES.

* VARIÁVEIS ALEATÓRIAS (V.A.'s)

EM QUALQUER APLICAÇÃO, MAS PRINCIPALMENTE EM FÍSICA, É CONVENIENTE TRABALHAR COM ATRIBUTOS NUMÉRICOS. "NÃO HÁ VALOR MÉDIO DE CARA OU COROA".

V.A.'s SÃO <u>FUNÇÕES</u> DO TIPO

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \to X(\omega)$, ONDE

$$\boxed{\mathbb{P}_x(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\})}.$$

INFORMALMENTE, UMA V.A. ASSOCIA UM ESPAÇO DE PROBABILIDADE "NUMÉRICO", $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_x)$, ÀQUELE ORIGINAL, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

A σ-ÁLGEBRA DE BOREL, $\mathcal{B}$, É A MENOR σ-ÁLGEBRA QUE CONTÉM TODOS OS INTERVALOS REAIS EM $[0,1]$.

A IMAGEM INVERSA $X^{-1}(B)$ DE QUALQUER $B \in \mathcal{B}$ PERTENCE A $\mathcal{F}$.

* V.A.'s DISCRETAS

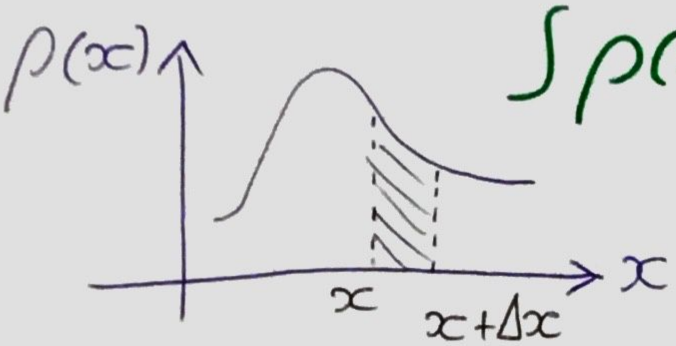
$$\sum_{n \in S} p_n = 1$$

$p_n = \mathbb{P}(X = n)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \mathbb{P}(X = x) > 0\}$ ENUMERÁVEL

ESPAÇO DE ESTADOS

* V.A.'s CONTÍNUAS



$$\int \rho(x)\,dx = 1$$

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x+\Delta x) \approx \rho(x).\,\Delta x$$

$$= \rho(x).\,\Delta x + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \rho(x) > 0\}$$

→ <u>NÃO</u> ENUMERÁVEL

OBS. 1: PODE HAVER $x \in S$ TAL QUE $\rho(x) > 1$.

OBS. 2: $\mathbb{P}(X = x) = 0, \ \forall x \in S$.