IME
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO

MPM5615-1

Tópicos de História da Matemática

Roger R. Primolan

São Paulo, 11 de março de 2022

Conteúdo

1 História das Equações Algébricas

Este é o texto referente ao *Tema* 4 *História das Equações Algébricas*, da disciplina *MPM5615-1 - Tópicos de História da Matemática.*

1.1 Contribuição Islâmica

Durante a segunda metade do século 7, houve uma grande expansão da civilização islâmica. Baseada em uma nova religião, o Islamismo, seguindo as inspirações do profeta Maomé, seus sucessores, chamados de califas, tiveram grande influência cultural, chegando até o oriente médio. Em 766 d.C. o califa al-Mansur fundou a cidade de Bagdá, que logo se tornou um polo comercial e intelectual. Entre 786 e 809, pelas mãos do califa Harun al-Rashid, foi erguida a biblioteca de Bagdá, que conseguiu reunir diversos manuscritos de Atenas e Alexandria que estavam espalhados pela região. Seu sucessor, o califa al-Ma'mun (8013-833), estabeleceu a *Casa da Sabedoria*, um centro de pesquisa que reuniu os grandes pensadores islâmicos por cerca de 200 anos.

Com todo esse investimento e a filosofia de que o conhecimento aproximava os homens do Divino, até o fim do século 9 a maioria dos textos clássicos de Euclides, Diofante, Apolônio, Arquimedes, etc. já estavam traduzidos para o árabe e não demorou muito para que os pesquisadores islâmicos passassem a produzir textos de própria autoria, com grande influência das obras europeias.

Um dos primeiros estudiosos da Casa da Sabedoria com destaque em equações algébricas foi Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, que viveu entre 780 e 850 d.C. e nasceu em uma região onde hoje é parte do Uzbequistão e Turcomenistão. Ele é o autor de *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, que se traduz livremente para *O livro condensado* *de cálculos de al-jabr e al-muqabala*, um dos primeiros textos islâmicos que tratavam de álgebra, produzido por volta de 825.

Figura 1: Primeira página de *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*. Fonte: Wikipédia.

A influência de al-Khwarizmi e suas publicações pode ser evidenciada no próprio jargão matemático, uma vez que a palavra *algoritmo* é derivada da latinização de seu nome via *dixit Algorismi*, latim para *disse al-Khwarizmi*. Outro termo cunhado a partir de seu trabalho, e de interesse maior para nosso tema, é a própria palavra *álgebra*, que deriva-se de *al-jabr*.

Mas do que se tratava o texto de al-Khwarizmi? De acordo com a introdução escrita pelo autor, seu livro trata-se de

> a short work on calculating by *al-jabr* and *al-muqabala*, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, and other objects of various sorts and kinds are concerned. (Katz, 2009, p. 271)

Para o autor, *al-jabr* significa o processo de eliminar um termo negativo em uma equação através de um termo positivo. Em notação atual, seria o processo descrito abaixo

$$x^2 - 3x = 9 \implies x^2 = 3x + 9.$$

Já *al-muqabala* é o processo de eliminar um termo positivo de uma equação, o que hoje entenderíamos como a seguinte passagem

$$x^2 + 4x + 2 = 8 \implies x^2 + 4x = 6.$$

Vemos também que al-Khwarizmi tinha preocupações geométricas, além das práticas, com o seu texto. Isso evidência-se com seu estilo de solução de equações algébricas de grau dois usando uma geometria com grande influência babilônica. Vale notar que as soluções propostas por ele eram retóricas, ou seja, eram soluções escritas por palavas, uma vez que a simbologia algébrica moderna ainda não havia sido cunhada.

Esse viés geométrico de al-Khwarizmi fez com que ele classificasse o que hoje entendemos como *equação de grau dois* em seis tipos diferentes. Essa classificação deve-se ao princípio da homogeneidade, isto é, de que somente é possível adicionar áreas com áreas. Essa visão torna difícil trabalhar com equações com termos negativos, pois não há intuição geométrica que justifique um objeto possuir -64 unidades de área. Por outro lado, esse viés anexa uma figura geométrica para o raciocínio (algébrico) das soluções de al-Khwarizmi, permitindo até a atualidade que estudantes desenvolvam mais intuição para a abstração moderna que álgebra exige.

Vejamos um exemplo geométrico de solução de uma equação de grau dois. A equação classificada por *quadrados e raízes igual a números*, na linguagem moderna $ax^2 + bx = c$, era resolvida por um método de *completar quadrados*. Assim à equação $x^2 + 6x = 16$ era adicionado 9 unidades de área, tornando-se $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 169 = 25 = 5^2$. Interpretando o lado esquerdo como um quadrado de lado $x + 3$, o lado direito nos diz que $x + 3 = 5$, ou seja, $x = 2$. Lembrando que a solução negativa $x = -8$ não era permitida, pois a raiz x representa o comprimento de um seguimento de reta, que sempre é um número positivo. Geometricamente esse raciocínio é exemplificado na Figura 2.

Porém, mesmo com grande influência geométrica em seu trabalho, al-Khwarizmi, em

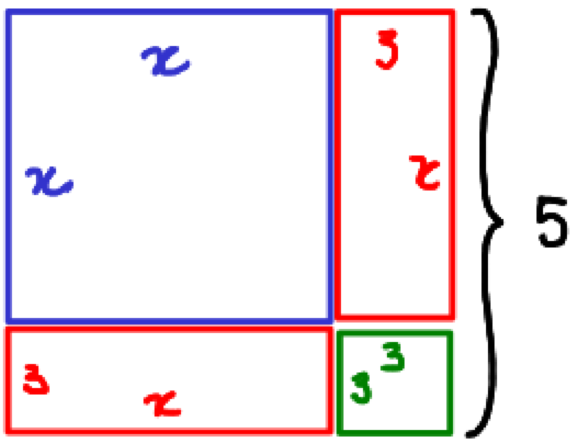


Figura 2: Método de completar quadrados.

uma passagem específica, aplicou um método abstrato. Ao somar expressões, que atualmente seriam polinômios, geometricamente distintas para ele, afirma 'isso não admite nenhuma figura, pois se tratam de três espécies diferentes (quadrados, raízes e números) (...) mesmo assim a elucidação em palavras é clara.'

Para a solução de *equações de grau três*, destaca-se o matemático islâmico ‘Umar ibn Ibrahim al-Khayyami, também conhecido como Omar Khayyam, nome pelo qual será citado neste texto. Khayyam foi um matemático e poeta nascido na região onde hoje é o Iran e viveu entre 1048 e 1131 d.C. Seu principal texto matemático chama-se *Risala fi-l-barahin ‘ala masa‘il al-jabr*, que se traduz para *Tratado de demonstrações de problemas em al-jabr e al-muqabala.*

No texto de Khayyam percebe-se uma grande influência da matemática e, em particular,

Figura 3: Omar Kayyam (1048-1131). Fonte: Wikipédia.

da geometria grega. Isso é evidenciado pelo uso de curvas cônicas (curvas obtidas através de seções de cones) como ferramenta para resolução de equações de terceiro grau. Essa grande influência é materializada no prefácio do livro do autor, uma vez que ele assume como pré-requisitos que o leitor esteja familiarizado com os trabalhos de Euclides, em específico *Os elementos* e *Data*, e alguns volumes de *Cônicas*, de Apolônio.

Devido à grande influência dos geômetras gregos, Khayyam, em seu texto retórico, adotava o principio da homogeneidade, tratando o termo x^3 como um cubo de arestas x unidades de comprimento, termos como $6x^2$ eram tratados como um paralelepípedo de lados x, x e 6, e a raiz, x, era um segmento de reta. Naturalmente, isso tornou difícil trabalhar com equações que possuíam coeficientes negativos, fazendo com que Khayyam separasse o que conhecemos como equação de terceiro grau em diversas classes, das quais quatorze não eram redutíveis à equações de grau dois.

Para entender melhor o viés do autor, vejamos uma solução geométrica proposta por ele para uma equação cúbica, retirada de [Katz, 2009, Capítulo 9, p. 289].

Vamos entender como o autor resolvia as equações do tipo *um cubo e lados igual a número*, ou seja, em termos modernos $x^3 + cx = d$. Lembrando que, pelo princípio da homogeneidade, o número c é um quadrado, para que a expressão cx possa ser representada por um volume. Também por clareza, a ideia dele será discorrida utilizando uma notação mais moderna do que a que ele tinha acesso.

Considere as seguintes equações cônicas:

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{c}y, \text{uma parábola com vértice na origem.} \\ \left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2, \text{uma circunferência de raio } \frac{d}{2c} \text{ e centro em } \left(\frac{d}{2c}, 0\right). \end{cases}$$

Vemos na Figura 4 que essas duas curvas cônicas se interceptam em dois pontos. Denote por (x_0, y_0) o que não é a origem. Então, notando que a circunferência pode ser escrita como

$$x\left(\frac{d}{c} - x\right) = y^2$$

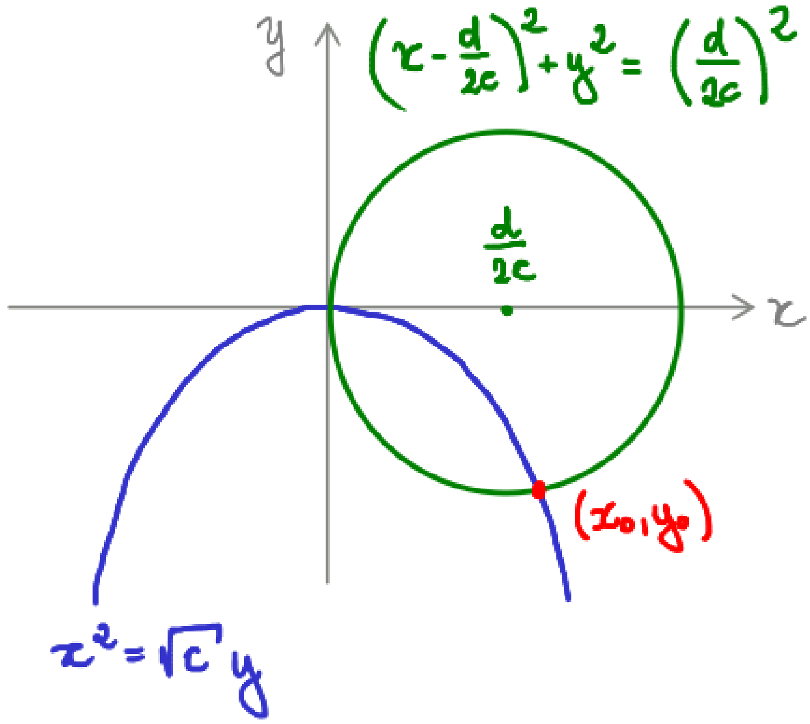


Figura 4: Solução geométrica de Khayyami

temos o seguinte cômputo válido para (x_0, y_0) usando as duas curvas que o definem

$$\frac{c}{x_0^2} = \frac{y_0^2}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)^2} = \frac{y_0^2}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)^2}\frac{x_0}{x_0} = \frac{x_0}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)},$$

onde a primeira igualdade segue pela fórmula da parábola e da circunferência e a última pela fórmula da circunferência.

Multiplicando ambos os lados para resolver as frações obtemos

$$x_0^3 + cx_0 = d,$$

como queríamos.

Em seu texto, apesar de Khayyami resolver alguns casos de equações cúbicas de maneira geométrica e retórica, ele não faz grandes esforços para mostrar que as soluções - ou intersecções - existem. Também não se preocupou muito em mostrar quantas soluções uma equação admitia. Porém, ele percebeu que para responder algumas dessas equações era necessário um passo de abstração, que hoje em dia é conhecido como os *números complexos*: ele escreveu 'quando o objeto do problema é um número absoluto, nem nós, ou qualquer outro interessado em álgebra, consegue resolver a equação - talvez outros que virão serão capazes de preencher esta lacuna'.

1.2 Contribuição Européia

Entre 1400 e 1600 d.C. a Europa viveu muitas mudanças. Esse período, conhecido como Renascimento, viu o surgimento e o fortalecimento de diversas rotas comerciais, avanços tecnológicos e grande intercâmbio cultural, além de uma filosofia de que a ciência aproxima o homem de Deus. Um dos pivôs dessa mudança foi a região da Itália, berço de diversas figuras importantes para o nosso tema.

Devido às interações com a cultura islâmica, no século 12 começaram esforços para traduzir, do árabe, diversas obras clássicas gregas e algumas obras islâmicas de matemática. Com esses textos à disposição os matemáticos renascentistas puderam estudar os clássicos e, naturalmente, começaram a produzir suas próprias obras.

O contexto intelectual matemático durante esse período era bem peculiar. Para que um pesquisador tivesse o seu trabalho financiado ele deveria ter prestígio, sendo que este era ganhado através de duelos intelectuais. Nessas ocasiões, dois matemáticos propunham uma quantidade fixa de problemas um para o outro e aquele que conseguisse resolver o maior número de problemas era sagrado vencedor.

Devido a esse contexto de muita competição, diversos matemáticos resolviam problemas e não ensinavam os métodos ou os publicavam, com o intuito de guardar um segredo que pudesse ser utilizado em algum desafio. Assim, vivia-se um ambiente de incentivo à matemática e ao individualismo.

Entre 1465 a 1526 d.C. viveu o matemático Scipione del Ferro, que foi um professor da Universidade de Bolonha interessado na resolução das equações polinomiais. Através de seus estudos ele foi capaz de desenvolver um método algébrico para a solução das equações de grau três da forma

$$x^3 + cx = d.$$

Devido ao contexto acadêmico dos duelos matemáticos, del Ferro guardou a sua solução como uma ferramenta contra quem o desafiasse. Já no fim de sua carreira, optou em ensinar o seu método para dois de seus estudantes - em detrimento da publicação de suas ideias. Por meio dessas aulas que seu pupilo Antonio Maria Fiore (cujo ano de nascimento e falecimento são desconhecidos) e seu sucessor em Bolonha Annibale della Nave (1500-1558 d.C) aprenderam o método de del Ferro para solução de $x^3 + cx = d$.

Simultaneamente, o matemático Niccolò Tartaglia de Brescia, que viveu entre 1499 e 1557 d.C., também conduzia estudos para soluções algébricas de alguns casos das equações de grau três. Seus esforços renderam-lhe um método que permitia resolver equações do tipo

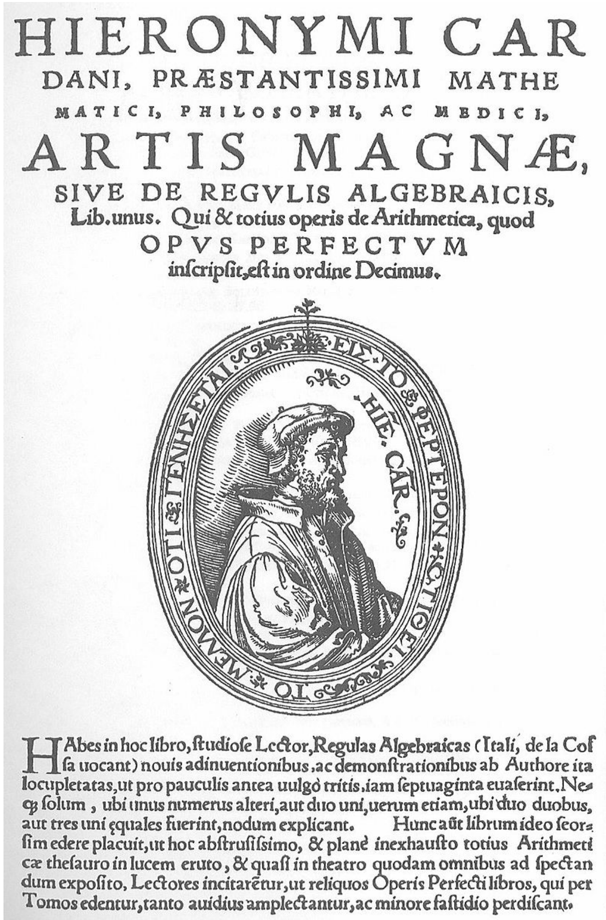
$$x^3 + bx^2 = d.$$

Com a notícia de que Tartaglia conhecia um método para solucionar alguns casos de equações de grau três, Fiore viu a oportunidade de confrontá-lo para um duelo matemático. Este duelo ocorreu em 1535. Fiore propôs trinta problemas envolvendo a equação que ele sabia, ou seja, $x^3 + cx = d$, enquanto Tartaglia o indagou sobre problemas modelados por $x^3 + bx^2 = d$.

O grande vencedor desse duelo acabou sendo Tartaglia, pois mesmo tendo aceitado o duelo sem saber resolver as equações do tipo $x^3 + cx = d$ foi capaz de deduzir um método que as resolvesse em 12 de fevereiro de 1535. Com a glória que recebeu por ter ganhado esse torneio e o interesse geral pela solução da equação de grau três em um contexto matemático individualista, seu nome se espalha entre os matemáticos contemporâneos, junto com uma promessa de que a cúbica havia sido resolvida. Não demora muito para que esses boatos cheguem em Milão nos ouvidos de Gerolamo Cardano (1501-1576 d.C.). Cardano, diferente de seus contemporâneos, tinha interesse em publicar um tratado de álgebra com as soluções do maior número possível de equações polinomiais. Para tanto, começou a trocar cartas com Tartaglia para que este o ensinasse os métodos desenvolvidos. Por sua vez, Tartaglia também tinha interesse em publicá-los, mas apenas no fim de sua carreira, quando os duelos não fossem mais necessários. Após promessa de Cardano que ele não publicaria os métodos de Tartaglia, este escreve um poema que contém o método para solução das cúbicas e em visita à Milão, no ano de 1535, Tartaglia finalmente ensina Cardano como solucionar as cúbicas.

Através de boatos de que del Ferro era o responsável pela solução das cúbicas e com auxílio de della Nave, Cardado e seu pupilo, Lodovico Ferrari (1522-1565 d.C.), viajam para Bolonha e estudam as anotações de del Ferro. Após verificar que del Ferro havia encontrado um método para resolver uma classe de equações cúbicas, viu-se desobrigado a comprir sua promessa com Tartaglia e publicou, em 1545, seu trabalho mais importante *Ars Magna, sive de Regulis Algebraicis*, que se traduz para *A grande arte ou sobre as regras da álgebra.* Seu trabalho compilava soluções das equações polinomiais até grau quatro, sendo que boa parte do livro era para métodos para cúbicas e o fim do livro ensinava a resolução das quárticas, desenvolvidas por Ferrari. Não há menção à Tartaglia como um dos responsáveis pelos métodos tratados no livro de Cardano.

O livro de Cardano fez grande sucesso e influência no estudo de álgebra. Uma das pessoas que estudaram-no foi Rafael Bombelli, um matemático de Roma que viveu entre 1526 e



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 5: Página de rosto de *Ars Magna*. Fonte: Wikipédia.

1572 d.C.. Uma das coisas que chamaram atenção de Bombelli foram os casos em que as equações cúbicas tinham soluções óbvias, mas aplicando o método de *Ars Magna* a resposta não era trivial. Por exemplo a equação

$$x^3 = 6x + 40,$$

tem uma solução óbvia que é $x = 4$. Já o método desenvolvido na publicação de Cardano gerava a resposta

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}.$$

Bombelli então analisou a solução do método através de raízes de números negativos, pois ele já havia percebido que estes aparecem em certas condições para aplicar o ensinado em *Ars Magna*. Trabalhando com raízes quadradas de números negativos como se fossem números 'normais', ele desenvolveu o início da aritmética complexa e dos números complexos. Esse é o vão apontado por Khayyam.

Escrevendo os números que aparecem na solução de Cardano na forma $a + \sqrt{b}$, para a e b números que podiam ser negativos, Bombelli foi capaz de demonstrar que

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4.$$

Mesmo tendo percebido esse padrão, Bombelli não acreditava no método que desenvolveu. De acordo com ele, trabalhar com raízes quadradas negativas 'é algo que aparenta ser baseado em sofisma ao invés da verdade'.

Outras contribuições de Bombelli para álgebra foram a publicação do livro *Algebra*, que

Figura 6: Capa de *Algebra*, por Bombelli. Fonte: Wikipédia.

tinha o intuito de ser um livro mais fácil de aprender do que *Ars Magna*, e o desenvolvimento de notações matemáticas para números positivos, negativos e expoentes.

1.3 A resolução do problema

Pulando para os séculos 18 e 19, a matemática europeia tinha feito grandes avanços. Dos de nosso interesse encontram-se: desenvolvimento e uso dos números complexos, geometria analítica e teorias estudando divisibilidade.

Um dos matemáticos mais influentes, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tentou resol-

Figura 7: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Fonte: Wikipédia.

ver este problema. Ele tinha interesse maior em conseguir descrever algebricamente as soluções de equações ciclotômicas, isto é, as equações do tipo $x^n - 1 = 0$. Note que, naquela época, já era sabido que essas equações tinham n soluções dadas por $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$, porém essas funções não são algébricas, uma vez que podem ser pensadas como uma série com infinitos termos. Naturalmente ele percebeu que fazendo sucessivas mudanças de variáveis, usando a decomposição de n em fatores primos, era necessário apenas conseguir resolver as equações do tipo $x^p - 1 = 0$, onde $p \in \mathbb{N}$ é um número primo.

A partir de um método de resoluções das ciclotômicas usando equações auxiliares cujos graus eram dados pelos fatores primos de $p - 1$, Gauss foi capaz de mostrar que as equações puras $x^n - a = 0$, com $a \in \mathbb{Q}$, podem ser resolvidas por radicais. Generalizando, foi capaz de mostrar que todas as equações misturáveis, que possuem termos não nulos de grau maior do que zero e menor do que n, que podiam ser reduzidas algebricamente para equações puras podem ser resolvidas por radicais. Note que esse é exatamente o processo pelo qual resolvemos as equações de grau dois usando o método de completar o quadrado, pois

$$x^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

e o lado direito da equivalência acima é uma equação pura.

Sobre as equações misturadas que não podiam ser reduzidas às puras, Gauss não conseguiu provar que era resolvíveis por radical. Sobre isso, ele disse

> Everyone knows that the most eminent geometers have been unsuccessful in the search for a general solution of equations higher than the fourth degree, or for the reduction of mixed equations to pure equations. And there is little doubt that this problem is not merely beyond the powers of contemporary analysis but proposes the impossible... Nevertheless, it is certain that there are innumerable mixed equations of every degree which admit a reduction to pure equations, and we trust that geometers will find it gratifying if we show that our equations are always of this kind. (Katz, 2009, p. 722)

A intuição de Gauss de que o problema da resolução por radicais de uma equação polinomial geral ser impossível mostrou-se acurada. Foi em meados dos anos 1820 que o jovem matemático Niels Henrik Abel (1802-1829) conseguiu mostrar a impossibilidade das equações de grau cinco serem resolvidas por radical, mostrando também a impossibilidade do problema mais geral. Após as suas descobertas, Abel tinha interesse em investigar as seguintes perguntas

- Classificar todas as equações, independente de grau, que são solúveis algebricamente.
- Decidir quando uma determinada equação admite resolução por radicais ou não.

Infelizmente Abel morreu muito jovem vítima de tuberculose e não conseguiu responder as perguntas acima. Apesar de sua morte precoce, Abel possuiu trabalhos de grande impacto o que fez com que o homenageassem no nome do prêmio Medalha Abel.

O trabalho que conseguiu responder as equações propostas por Abel foi desenvolvido por

Figura 8: Niels Henrik Abel (1802-1829). Fonte: Wikipédia.

outro jovem matemático: Evariste Galois (1811-1832). O trabalho de Galois consiste em um estudo mais sistemático de como as equações de uma solução podem ser permutadas entre si. Por exemplo, é sabido que a conjugação complexa leva as soluções de equações polinomiais com coeficientes reais em outras soluções (quando o número tem parte imaginária). Um exemplo que ilustra isso é a equação $x^2+1=0$ cujas soluções são i e $\overline{i}=-i$.

Figura 9: Evariste Galois (1811-1832). Fonte: Wikipédia.

A ideia de estudar permutações para entender as soluções de uma equação surgiu com Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mas foi Galois que conseguiu conectá-la com o que hoje conhecemos como grupos. Galois foi capaz de entender que uma equação poderia ser associada a uma extensão de corpos, chamada de corpo de raízes do polinômio em questão. Por sua vez, estudando os automorfismos de corpos do corpo de raízes que fixavam $\mathbb{Q}$, Galois percebeu que uma equação era solúvel por radicais se, e somente se, o seu grupo de automorfismos (hoje chamado de grupo de Galois) tinha uma propriedade de poder ser estudado usando quocientes que eram finitos e abelianos. Hoje entendemos isso por um grupo solúvel.

Galois faleceu tragicamente aos 20 anos em um duelo de motivação passional e/ou política, mas seu legado mudou o rumo dos estudos algébricos tornando-os mais parecidos com a Álgebra estudada atualmente.

2 Grothendieck

Este é o texto referente ao *Tema* 15 *Grothendieck*, da disciplina *MPM5615-1 - Tópicos de História da Matemática.* As referências para este texto foram [Scharlau, 2008] e [O'Connor and Robertson, 2014].

2.1 Infância e Adolescência

Alexander Grothendieck nasceu em 28 de março de 1928 em Berlin, Alemanha, com o nome de Alexander Raddatz, filho de Alexander Schapiro (1890-1942) e Johanna Grothendieck (1900-1957). Seu sobrenome inicial deve-se à Alfred Raddatz que, na época de seu nascimento, era o esposo de Johanna, este casamento chega ao fim em 1929.

Seu pai, Alexander Schapiro, era um judeu russo e anarquista. Devido às suas convicções políticas, Schapiro foi preso, em 1907, por lutar ao lado de revolucionários contra o regime dos czares. Condenado à morte, passou algumas semanas sendo mandado para execução, que nunca foi efetuada por ter apenas de 17 anos de idade. Após essas tentativas, a sua pena foi reduzida para prisão perpétua. Durante a Revolução Russa de 1917, Schapiro conseguiu fugir de sua prisão em 1921, momento no qual acredita-se que ele perdeu um braço, e se refugiou na Alemanha. No novo país adotou o nome de Alexander Tanaroff e tornou-se fotógrafo.

Devido a ascensão do partido Nazista na Alemanha em 1933 e as raízes judáicas de Schapiro, os pais de Grothendieck se mudam para a França e Grothendieck é abrigado em Hamburgo, na casa de um pastor chamado Heydorn, no início de 1934. Lá Grothendieck começa a sua educação básica. Enquanto Grothendieck passava a sua infância em Hamburgo, seus pais vão para a Espanha, com ajuda dos republicanos, para apoiarem-nos na Guerra Civil Espanhola (1936-1939), após o seu término o casal volta para a França. Porém a situação na Alemanha foi piorando até que, em 1939, Grothendieck é mandado para a França em encontro de seus pais.

Em 1938, é aprovada na França a Lei dos Indesejáveis, que ordenava que os alemães que viviam na França deveriam ser alocados em campos especiais de internação. Por causa disso, Grothendieck e sua mãe foram obrigados a viver no Campo de Rieucros, perto de Mende, mas Grothendieck conseguiu o direito de continuar sua educação em um colégio que ficava à 5km do campo. Seu pai foi mandado para o Campo de Vernet.

Em 1942 o Campo de Rieucros foi fechado e Grothendieck e sua mãe foram levados para o Campo de Concentração de Gurs, Grothendieck consegue acabar o colegial em 1945. Também no mesmo ano de 1942, seu pai é entreguado para os alemães que o mandam para o Campo de Exterminação de Auschwitz, onde é assassinado. Vale resaltar que durante a época dos campos especiais de internação, a mãe de Grothendieck contrai tuberculose que, anos depois, seria a causa de sua morte. Assim, devido à Segunda Guerra Mundial, Grothendieck acaba perdendo ambos os pais.

2.2 Formação Acadêmica

Com o fim da Segunda Guerra Mundial, Grothendieck e sua mãe se mudaram para a vila de Maisargues, perto de Montpellier, na França. Ele passa a frenquentar a Universidade de Montpellier estudando Matemática com ajuda de uma pequena bolsa e trabalhando em um vinhedo. Durante seu período na Universidade de Montpellier, Grothendieck começa a trabalhar em um problema que o incomodava durante a sua escolarização: por que as áreas e volumes são calculados do jeito que o ensinaram. Aqui vemos que Grothendieck já apresentava, desde cedo, uma grande preocupação com perguntas mais fundamentais, uma vez que não se via satisfeito com o ensino que apenas o ensinava ferramentas para calcular tais grandezas. Sem muito auxílio Grothendieck mergulha nesta pergunta e desenvolve, independentemente, a teoria de integração de Lebesgue.

Após se formar, passa o ano acadêmico de 1948-1949 na École Normale Supérieure, em Paris. Nesta instituição, Grothendieck passa a assistir os seminários de Cartan (1869-1951) sobre Topologia Algébria e Teoria de Feixes. Além de Grothendieck também assistiam aos seminários os matemáticos Chevalley (1909-1984), Dieudonné (1906-1992), Schwartz (Medalhista Fields em 1950, 1915-2002), Weil (1906-1998), entre outros.

Após este período, Grothendieck passa a frequentar a Universidade de Nancy, estudando sobre a orientação de Schwartz e Dieudonné o tópico de espaços vetoriais topológicos. Durante o seu doutorado, os orientadores de Grothendieck passaram a estudar espaços de Fréchet e limites diretos deles, chegando a uma série de problemas que não conseguiram resolver. Passaram os estudos deles para Alexander, que em menos de um ano foi capaz de desenvolver técnicas que resolveram todos os problemas que os seus orientadores haviam encontrado e passou o resto do seu doutorado aplicando essas mesmas técnicas em outros problemas. Em 1953 concluiu a sua tese de doutorado chamada *Produtos tensoriais topológicos e espaços nucleares.* Sua segunda tese, que deveria constituir de estudos em uma área diferente da sua tese principal, foi sobre Teoria de Feixes. Logo após a sua defesa de tese, Grothendieck confessou para um amigo que acreditava que não havia mais nenhum problema relevante em espaços vetoriais topológicos.

2.3 Pesquisador e Professor

Após conseguir o título de professor, Grothendieck trabalhou o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, durante o período de 1953 à 1955. Em

1956, trabalhou na Universidade de Kansas. Foi durante esse período que Grothendieck começou a mostrar maior interesse em pesquisar geometria algébrica e consolidou seus conhecimentos nesta área.

Em 1957, já pesquisando na nova área, Grothendieck se torna um professor do Centre National de la Recherche Scientifique, neste período Grothendieck se torna um Bourbakista. Em 1959 passa a ser um pesquisador do recém criado Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), nesta instituição Grothendieck viveu a sua *Época de Ouro*.

Foi no IHES que Grothendieck criou o famoso Seminário de Geometria Algébrica, começou a trabalhar nos Ensaios de Geometria Algébrica e produziu muita matemática de qualidade. Devido à isso ele foi laureado com a Medalha Fields em 1966, porém se recusou a recebê-la, pois era pacifista e a cerimônia da entrega seria realizada em Moscou, na URSS. Seu tempo em IHES terminou quando, em 1970, descobriu que a instituição recebia fundos de origens militares e se demitiu do cargo. Após esse evento Grothendieck mudou o seu foco de matemática para política e atuou, sem muito exito, em protestos políticos, principalmente contra o armamento nuclear. Entre 1972 e 73, foi professor visitante em Collège de France. Em 1973 passou a trabalhar na Universidade de Montpellier, onde ele havia graduado. Em 1984 foi diretor do Centre National de la Recherche Scientifique até 1988, quando se aposentou aos 66 anos.

Abaixo seguem alguns dos trabalhos de Grothendieck:

- Elementos da Geometria Algébrica: um tratado rigoroso em geometria algébrica de oito volumes.

- Seminários de Geometria Algébrica: três volumes de notas dos seminários que coordenou no IHES.

- Tohoku: artigo que revolucionou a álgebra homologia, um dos motivos pelo qual ganhou a Medalha Fields em 1966.

- Riemann–Roch: Conseguiu uma demonstração algébrica do Teorema de Riemman-Roch.

- Conjecturas de Weil: resolveu três das quatro conjecturas de Weil.

Grothendieck foi um dos maiores matemáticos do Século XX. Além de seu gênio impar, diversas pessoas que tiveram o privilégio de trabalhar com ele durante seus anos como matemático diziam que ele possuia uma excelente ética de trabalho, dedicando quase todo seu tempo durante décadas apenas para matemática. Além disso, seus seminários eram sempre muito bem formalizados e todo mundo conseguia compreender pelo menos um pouco de sua explanação devido à esta característica. Grothendieck também passou diversos problemas para os seus alunos e colaboradores durante a sua carreira.

2.4 Aposentadoria

Após se aposentar em 1988, Grothendieck passou a se afastar cada vez mais das pessoas. Durante esse período começou a escrever sobre filosofia e espiritualidade. Em uma dessas buscas por espiritualidade, decidiu fazer um jejum tão agressivo que quase o levou ao óbito. Acabou falecendo em 13 de novembro de 2014, em Saint-Lizier, na França.

3 Uma Breve História da Álgebra Homológica

Este é o texto referente ao *Tema* 16 *História da Álgebra Homológica*, da disciplina *MPM5615-1 - Tópicos de História da Matemática*. A referência para este texto foi [Weibel, 1999].

3.1 Início da Teoria

Baseado no teorema de Stokes, que diz que a seguinte integral, sobre um caminho fechado em $\mathbb{R}^2$,

$$\int X dx + Y dy$$

é nula, Riemann (1826-1866) define, em 1857, um número que codificaria a conexidade de uma variedade (geométrica).

De acordo com ele, S é uma $(n+1)$-variedade conexa quando existe uma família $C = \{C_i\}$ de n curvas fechadas em S tal que nenhum subconjunto de C forma a fronteira completa de parte de S e essa família é maximal para tal propriedade. Em termos modernos, o número de conexidade que Riemann definiu é $1 + \dim H_1(S; \mathbb{Z}_2)$.

Riemann tinha saúde frágil e visitou, para covalescer, a Itália entre 1858 e 1866. Durante esse período, Riemann visitava Enrico Betti (1823-1892) em Pisa, os dois conversavam sobre como estender essa teoria. Isso leva Riemann a redefinir este conceito substituindo curvas fechadas por subcomplexos n-dimensionais e estuda como cortes de diversas dimensões podem alterar o número de conexidade de uma variedade.

Em 1871, Betti usa ideias dos trabalhos de Riemann para demonstrar que os números homológicos não dependiam da base escolhida, porém Heegard, em 1898, aponta alguns equívicos na demonstração de Betti. Por exemplo, de acordo com as definições de Betti o meridiano do toro não seria uma curva fechada.

Os próximos grandes avanços desta teoria se devem a Poincaré (1854-1912) que, motivado pelos trabalhos de Betti, desenvolveu uma teoria homológica mais apropriada em seu artigo *Analysis Situs*, de 1895. Uma das ideias que teve foi utilizar espaços vetoriais e variedades localmente lineares, aquelas que a mudança de carta é uma aplicação linear. Fixada uma variedade localmente linear V, Poincaré considerou subvariedades n-dimensionais $V_i \subset V$ e introduz uma relação homológica dada por

$$\sum k_i V_i \sim 0$$

quando existe uma subvariedade $(n+1)$-dimensional cuja fronteira consiste de k_1 variedades do tipo V_1, k_2 do tipo V_2, etc. Uma família de subvariedades n-dimensionais foi dita linearmente independente quando não há homologia que as conecte.

Com essas definições, Poincaré definiu o n-ésimo número de Betti de V como $b_n + 1$, onde b_n é o tamanho de uma família linearmente independente de subvariedades n-dimensionais de V que é maximal para essa propriedade. Atualmente, o número de Betti que consideramos é b_n ao invés de $b_n + 1$. Com esse novo número em mãos, Poincaré provou o teorema da dualidade, que diz que os números de Betti de uma variedade V satisfazem

$$b_i = b_{m-i},$$

onde $m = \dim V$. Poincaré também define o que seriam os coeficientes de torção de uma variedade.

Também é devida a Poincaré uma das primeiras generalizações da característica de Euler. Ele a define para uma variedade V como sendo

$$\chi(V) = \sum (-1)^n \alpha_n,$$

onde α_n é o número de células n-dimensionais necessárias para construir V.

3.2 Indícios Algébricos em Homologia de Espaços Topológicos

A teoria de Poincaré demorou três décadas para ser absorvida e consolidada por seus contemporâneos. Dentre os diversos trabalhos destacam-se o de Alexander (1888-1971) que, em 1915, mostra que os números de Betti e os coeficientes de torção são invariantes topológicos, além de completar um vão geométrico nos trabalhos de Poincaré, e Künneth (1892-1975) que, em 1923, consegue calcular o número de Betti e os coeficientes de torção para o produto de variedades, usando esses dados das variedades individuais.

Esse período de estudo visando calcular os números de Betti e os coeficientes de torção perde sucesso após a contribuição de Emmy Noether (1882-1935). Noether percebe, em 1925, que a teoria homológica não era sobre os números de Betti e os coeficientes de torção e sim sobre grupos abelianos! Essa visão inspirou bastante o Hopf (1894-1971), que veio a se tornar um importante estudioso de topologia algébrica, e o artigo de 1929 de Mayer (1887-1948), que introduziu as ideias algébricas de complexos de cadeia, subgrupo de ciclos e grupos de homologia de um complexo. É depois da observação de Noether que surgem diversas teorias homológicas que conhecemos hoje, com destaque para os trabalhos de Alexander, Alexandroff (1896–1982), Čech (1893–1960), Lefschetz (1884–1972), Kolmogoroff (1903–1987) e Kurosh (1908–1971).

Após esse período, diversos fatos algébricos começaram a tomar o holofote das estruturas topológicas. Por exemplo, em 1935, Hurewicz estudou alguns mapas (posteriormente denominados em sua homenagem) $h : \pi_n(V) \longrightarrow H_n(V, \mathbb{Z})$, chegando a primeira definição intrínseca de grupo fundamental. Em 1935, Potrjagin e Brauer calcularam a homologia de grupos de Lie clássicos, resultado que foi utilizado por Hopf, em 1935, para provar o que hoje chamaríamos de classificação de Álgebras de Hopf graduadas de dimensão finita sobre $\mathbb{Q}$. Em 1935, Čech descobre que $\mathbb{Z}$ é um grupo de coeficientes universais para homologia. E em 1935, Alexander e Kolmogoroff, de maneira independente e simultânea, descobrem a teoria de cohomologia e o produto *cup*. Foi também nesta época que Whitney encontra uma formulação para o produto tensorial de grupos abelianos (quaisquer) e Hurewicz concebe o conceito de sequências exatas.

Esses aparecimentos algébricos na teoria homológica de espaços vetoriais se tornam cada vez mais fortes, abaixo encontram-se algumas:

1. Extenções de grupos surgiram naturalmente em cohomologia.
2. A homologia de um espaço asférico Y, $\pi_n(Y) = 0$ para qualquer $n \neq 1$, dependia apenas do grupo fundamental $\pi_1(Y)$.
3. A homologia de um grupo de Lie G dependia apenas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a G.

3.3 Álgebra Homológica

Em 1941, Mac Lane e Eilemberg foram capazes de descobrir fortes ligações entre o estudo de extensões de grupos com alguns grupos de homologia calculados por Steenrod em 1940. Através desta conexão, eles publicaram um artigo que, além de torná-la explícita, construiu o plano de fundo teórico: Teoria de Categorias. A teoria de categorias passou a ser de grande importância em toda a matemática, mas, em particular, teve muita influência em teoria de homologia. Em 1948, Mac Lane introduz o conceito de categorias abelianas, que permitia generalizar as noções de homologia e cohomologia de grupos abelianos. Cartan e Eilemberg desenvolveram a teoria de funtores derivados em seu famoso livro *Homological Algebra*, esses conceitos foram generalizados por Grothendieck, no artigo *Tohoku* de 1957, o que contribuiu para o mesmo ser laureado com a Medalha Fields em 1966. As noção de injetivos foi introduzida por Baer em 1940 e a de projetivos no livro de Cartan e Eilemberg.

Com toda essa nova teoria, desenvolveram-se as noções de resoluções injetivas e projetivas (note que as resoluções livres já haviam sido estudadas por Hilbert, estudos que culminaram no famoso Teorema das Syzygias de Hilbert) e a álgebra homológica foi unificada. Como exemplo, Hochschild aplicou ela para estudar uma k-álgebra A associativa, com k um corpo, pensando em A como $A^e = A \otimes_k Aop$-módulo e, para enfraquecer a noção de álgebras sobre um corpo, desenvolveu, em 1956, a álgebra homológica relativa.

Referências

[Gray and Parshall, 2011] Gray, J. J. and Parshall, K. H. (2011). *Episodes in the history of modern algebra (1800-1950)*, volume 32. American Mathematical Soc.

[Katz, 2009] Katz, V. J. (2009). *History of mathematics.* Pearson New York.

[Kleiner et al., 2007] Kleiner, I. et al. (2007). *A history of abstract algebra.* Springer Science & Business Media.

[O'Connor and Robertson, 2014] O'Connor and Robertson (2014). Alexander grothendieck.

[Scharlau, 2008] Scharlau, W. (2008). Who is alexander grothendieck? *Notices of the AMS*, 55(8):9030–941.

[Stillwell and Stillwell, 1989] Stillwell, J. and Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its History*, volume 3. Springer.

[Weibel, 1999] Weibel, C. A. (1999). *History of homological algebra.* Citeseer.