MPM5615-1

Tópicos de História da Matemática

Roger R. Primolan

São Paulo, 12 de fevereiro de 2022

Conteúdo

1 História das Equações Algébricas

Este é o texto referente ao *Tema* 4 *História das Equações Algébricas*, da disciplina *MPM5615-1 - Tópicos de História da Matemática.*

1.1 Contribuição Islâmica

Durante a segunda metade do século 7, houve uma grande expansão da civilização islâmica. Baseada em uma nova religião, o Islamismo, seguindo as inspirações do profeta Maomé, seus sucessores, chamados de califas, tiveram grande influência cultural, chegando até o oriente médio. Em 766 d.C. o califa al-Mansur fundou a cidade de Bagdá, que logo se tornou um polo comercial e intelectual. Entre 786 e 809, pelas mãos do califa Harun al-Rashid, foi erguida a biblioteca de Bagdá, que conseguiu reunir diversos manuscritos de Atenas e Alexandria que estavam espalhados pela região. Seu sucessor, o califa al-Ma'mun (8013-833), estabeleceu a *Casa da Sabedoria*, um centro de pesquisa que reuniu os grandes pensadores islâmicos por cerca de 200 anos.
Com todo esse investimento e a filosofia de que o conhecimento aproximava os homens do Divino, até o fim do século 9 a maioria dos textos clássicos de Euclides, Diofante, Apolônio, Arquimedes, etc. já estavam traduzidos para o árabe e não demorou muito para que os pesquisadores islâmicos passassem a produzir textos de própria autoria, com grande influência das obras europeias.
Um dos primeiros estudiosos da Casa da Sabedoria com destaque em equações algébricas foi Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, que viveu entre 780 e 850 d.C. e nasceu em uma região onde hoje é parte do Uzbequistão e Turcomenistão. Ele é o autor de *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, que se traduz livremente para *O livro condensado*

de cálculos de al-jabr e al-muqabala, um dos primeiros textos islâmicos que tratavam de álgebra, produzido por volta de 825.

Figura 1: Primeira página de *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*. Fonte: Wikipédia.

A influência de al-Khwarizmi e suas publicações pode ser evidenciada no próprio jargão matemático, uma vez que a palavra *algoritmo* é derivada da latinização de seu nome via *dixit Algorismi*, latim para *disse al-Khwarizmi*. Outro termo cunhado a partir de seu trabalho, e de interesse maior para nosso tema, é a própria palavra *álgebra*, que deriva-se de *al-jabr*.

Mas do que se tratava o texto de al-Khwarizmi? De acordo com a introdução escrita pelo autor, seu livro trata-se de

> a short work on calculating by *al-jabr* and *al-muqabala*, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, and other objects of various sorts and kinds are concerned. (Katz, 2009, p. 271)

Para o autor, *al-jabr* significa o processo de eliminar um termo negativo em uma equação através de um termo positivo. Em notação atual, seria o processo descrito abaixo

$$x^2 - 3x = 9 \implies x^2 = 3x + 9.$$

Já *al-muqabala* é o processo de eliminar um termo positivo de uma equação, o que hoje entenderíamos como a seguinte passagem

$$x^2 + 4x + 2 = 8 \implies x^2 + 4x = 6.$$

Vemos também que al-Khwarizmi tinha preocupações geométricas, além das práticas, com o seu texto. Isso evidência-se com seu estilo de solução de equações algébricas de grau dois usando uma geometria com grande influência babilônica. Vale notar que as soluções propostas por ele eram retóricas, ou seja, eram soluções escritas por palavas, uma vez que a simbologia algébrica moderna ainda não havia sido cunhada.

Esse viés geométrico de al-Khwarizmi fez com que ele classificasse o que hoje entendemos como *equação de grau dois* em seis tipos diferentes. Essa classificação deve-se ao princípio da homogeneidade, isto é, de que somente é possível adicionar áreas com áreas. Essa visão torna difícil trabalhar com equações com termos negativos, pois não há intuição geométrica que justifique um objeto possuir -64 unidades de área. Por outro lado, esse viés anexa uma figura geométrica para o raciocínio (algébrico) das soluções de al-Khwarizmi, permitindo até a atualidade que estudantes desenvolvam mais intuição para a abstração moderna que álgebra exige.

Vejamos um exemplo geométrico de solução de uma equação de grau dois. A equação classificada por *quadrados e raízes igual a números*, na linguagem moderna $ax^2 + bx = c$, era resolvida por um método de *completar quadrados*. Assim à equação $x^2 + 6x = 16$ era adicionado 9 unidades de área, tornando-se $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 169 = 25 = 5^2$. Interpretando o lado esquerdo como um quadrado de lado $x + 3$, o lado direito nos diz que $x + 3 = 5$, ou seja, $x = 2$. Lembrando que a solução negativa $x = -8$ não era permitida, pois a raiz x representa o comprimento de um seguimento de reta, que sempre é um número positivo. Geometricamente esse raciocínio é exemplificado na Figura 2.

Porém, mesmo com grande influência geométrica em seu trabalho, al-Khwarizmi, em

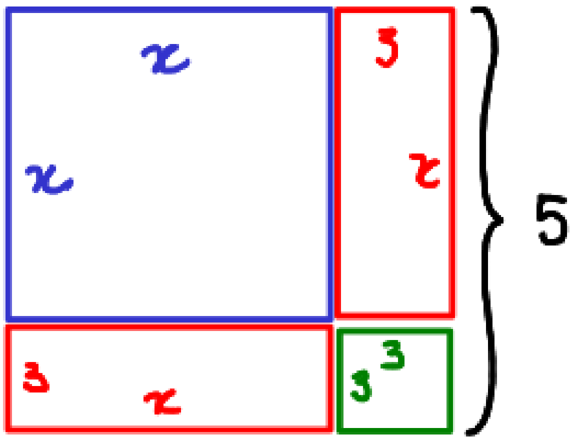


Figura 2: Método de completar quadrados.

uma passagem específica, aplicou um método abstrato. Ao somar expressões, que atualmente seriam polinômios, geometricamente distintas para ele, afirma 'isso não admite nenhuma figura, pois se tratam de três espécies diferentes (quadrados, raízes e números) (...) mesmo assim a elucidação em palavras é clara.'

Para a solução de *equações de grau três*, destaca-se o matemático islâmico 'Umar ibn Ibrahim al-Khayyami, também conhecido como Omar Khayyam, nome pelo qual será citado neste texto. Khayyam foi um matemático e poeta nascido na região onde hoje é o Iran e viveu entre 1048 e 1131 d.C. Seu principal texto matemático chama-se *Risala fi-l-barahin 'ala masa'il al-jabr*, que se traduz para *Tratado de demonstrações de problemas em al-jabr e al-muqabala.*

No texto de Khayyam percebe-se uma grande influência da matemática e, em particular,

Figura 3: Omar Kayyam (1048-1131). Fonte: Wikipédia.

da geometria grega. Isso é evidenciado pelo uso de curvas cônicas (curvas obtidas através de seções de cones) como ferramenta para resolução de equações de terceiro grau. Essa grande influência é materializada no prefácio do livro do autor, uma vez que ele assume como pré-requisitos que o leitor esteja familiarizado com os trabalhos de Euclides, em específico *Os elementos* e *Data*, e alguns volumes de *Cônicas*, de Apolônio.

Devido à grande influência dos geômetras gregos, Khayyam, em seu texto retórico, adotava o principio da homogeneidade, tratando o termo x^3 como um cubo de arestas x unidades de comprimento, termos como $6x^2$ eram tratados como um paralelepípedo de lados x, x e 6, e a raiz, x, era um segmento de reta. Naturalmente, isso tornou difícil trabalhar com equações que possuíam coeficientes negativos, fazendo com que Khayyam separasse o que conhecemos como equação de terceiro grau em diversas classes, das quais quatorze não eram redutíveis à equações de grau dois.

Para entender melhor o viés do autor, vejamos uma solução geométrica proposta por ele para uma equação cúbica, retirada de [Katz, 2009, Capítulo 9, p. 289].

Vamos entender como o autor resolvia as equações do tipo *um cubo e lados igual a número*, ou seja, em termos modernos $x^3 + cx = d$. Lembrando que, pelo princípio da homogeneidade, o número c é um quadrado, para que a expressão cx possa ser representada por um volume. Também por clareza, a ideia dele será discorrida utilizando uma notação mais moderna do que a que ele tinha acesso.

Considere as seguintes equações cônicas:

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{c}y, \text{uma parábola com vértice na origem.} \\ \left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2, \text{uma circunferência de raio } \frac{d}{2c} \text{ e centro em } \left(\frac{d}{2c}, 0\right). \end{cases}$$

Vemos na Figura 4 que essas duas curvas cônicas se interceptam em dois pontos. Denote por (x_0, y_0) o que não é a origem. Então, notando que a circunferência pode ser escrita como

$$x\left(\frac{d}{c} - x\right) = y^2$$

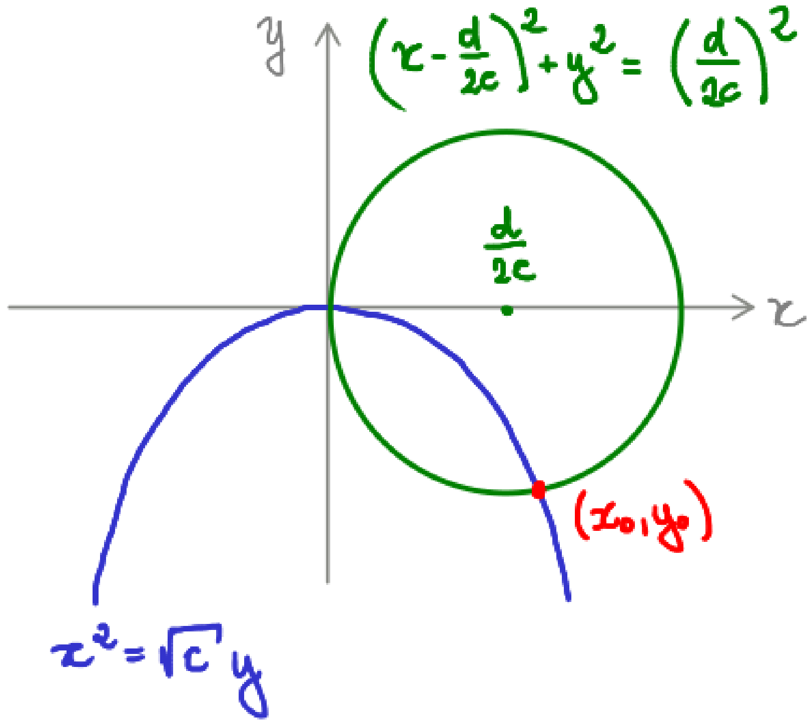


Figura 4: Solução geométrica de Khayyami

temos o seguinte cômputo válido para (x_0, y_0) usando as duas curvas que o definem

$$\frac{c}{x_0^2} = \frac{y_0^2}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)^2} = \frac{y_0^2}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)^2} \frac{x_0}{x_0} = \frac{x_0}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)},$$

onde a primeira igualdade segue pela fórmula da parábola e da circunferência e a última pela fórmula da circunferência.

Multiplicando ambos os lados para resolver as frações obtemos

$$x_0^3 + cx_0 = d,$$

como queríamos.

Em seu texto, apesar de Khayyami resolver alguns casos de equações cúbicas de maneira geométrica e retórica, ele não faz grandes esforços para mostrar que as soluções - ou intersecções - existem. Também não se preocupou muito em mostrar quantas soluções uma equação admitia. Porém, ele percebeu que para responder algumas dessas equações era necessário um passo de abstração, que hoje em dia é conhecido como os *números complexos*: ele escreveu 'quando o objeto do problema é um número absoluto, nem nós, ou qualquer outro interessado em álgebra, consegue resolver a equação - talvez outros que virão serão capazes de preencher esta lacuna'.

1.2 Contribuição Européia

Entre 1400 e 1600 d.C. a Europa viveu muitas mudanças. Esse período, conhecido como Renascimento, viu o surgimento e o fortalecimento de diversas rotas comerciais, avanços tecnológicos e grande intercâmbio cultural, além de uma filosofia de que a ciência aproxima o homem de Deus. Um dos pivôs dessa mudança foi a região da Itália, berço de diversas figuras importantes para o nosso tema.

Devido às interações com a cultura islâmica, no século 12 começaram esforços para traduzir, do árabe, diversas obras clássicas gregas e algumas obras islâmicas de matemática. Com esses textos à disposição os matemáticos renascentistas puderam estudar os clássicos e, naturalmente, começaram a produzir suas próprias obras.

O contexto intelectual matemático durante esse período era bem peculiar. Para que um pesquisador tivesse o seu trabalho financiado ele deveria ter prestígio, sendo que este era ganhado através de duelos intelectuais. Nessas ocasiões, dois matemáticos propunham uma quantidade fixa de problemas um para o outro e aquele que conseguisse resolver o maior número de problemas era sagrado vencedor.

Devido a esse contexto de muita competição, diversos matemáticos resolviam problemas e não ensinavam os métodos ou os publicavam, com o intuito de guardar um segredo que pudesse ser utilizado em algum desafio. Assim, vivia-se um ambiente de incentivo à matemática e ao individualismo.

Entre 1465 a 1526 d.C. viveu o matemático Scipione del Ferro, que foi um professor da Universidade de Bolonha interessado na resolução das equações polinomiais. Através de seus estudos ele foi capaz de desenvolver um método algébrico para a solução das equações de grau três da forma

$$x^3 + cx = d.$$

Devido ao contexto acadêmico dos duelos matemáticos, del Ferro guardou a sua solução como uma ferramenta contra quem o desafiasse. Já no fim de sua carreira, optou em ensinar o seu método para dois de seus estudantes - em detrimento da publicação de suas ideias. Por meio dessas aulas que seu pupilo Antonio Maria Fiore (cujo ano de nascimento e falecimento são desconhecidos) e seu sucessor em Bolonha Annibale della Nave (1500-1558 d.C) aprenderam o método de del Ferro para solução de $x^3 + cx = d$.

Simultaneamente, o matemático Niccolò Tartaglia de Brescia, que viveu entre 1499 e 1557 d.C., também conduzia estudos para soluções algébricas de alguns casos das equações de grau três. Seus esforços renderam-lhe um método que permitia resolver equações do tipo

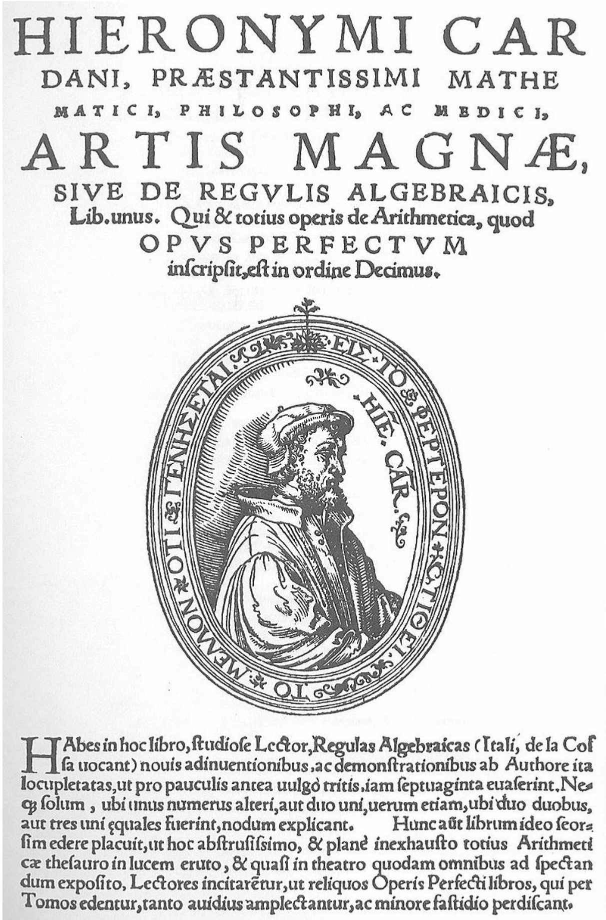
$$x^3 + bx^2 = d.$$

Com a notícia de que Tartaglia conhecia um método para solucionar alguns casos de equações de grau três, Fiore viu a oportunidade de confrontá-lo para um duelo matemático. Este duelo ocorreu em 1535. Fiore propôs trinta problemas envolvendo a equação que ele sabia, ou seja, $x^3 + cx = d$, enquanto Tartaglia o indagou sobre problemas modelados por $x^3 + bx^2 = d$.

O grande vencedor desse duelo acabou sendo Tartaglia, pois mesmo tendo aceitado o duelo sem saber resolver as equações do tipo $x^3 + cx = d$ foi capaz de deduzir um método que as resolvesse em 12 de fevereiro de 1535. Com a glória que recebeu por ter ganhado esse torneio e o interesse geral pela solução da equação de grau três em um contexto matemático individualista, seu nome se espalha entre os matemáticos contemporâneos, junto com uma promessa de que a cúbica havia sido resolvida. Não demora muito para que esses boatos cheguem em Milão nos ouvidos de Gerolamo Cardano (1501-1576 d.C.). Cardano, diferente de seus contemporâneos, tinha interesse em publicar um tratado de álgebra com as soluções do maior número possível de equações polinomiais. Para tanto, começou a trocar cartas com Tartaglia para que este o ensinasse os métodos desenvolvidos. Por sua vez, Tartaglia também tinha interesse em publicá-los, mas apenas no fim de sua carreira, quando os duelos não fossem mais necessários. Após promessa de Cardano que ele não publicaria os métodos de Tartaglia, este escreve um poema que contém o método para solução das cúbicas e em visita à Milão, no ano de 1535, Tartaglia finalmente ensina Cardano como solucionar as cúbicas.

Através de boatos de que del Ferro era o responsável pela solução das cúbicas e com auxílio de della Nave, Cardado e seu pupilo, Lodovico Ferrari (1522-1565 d.C.), viajam para Bolonha e estudam as anotações de del Ferro. Após verificar que del Ferro havia encontrado um método para resolver uma classe de equações cúbicas, viu-se desobrigado a comprir sua promessa com Tartaglia e publicou, em 1545, seu trabalho mais importante *Ars Magna, sive de Regulis Algebraicis*, que se traduz para *A grande arte ou sobre as regras da álgebra*. Seu trabalho compilava soluções das equações polinomiais até grau quatro, sendo que boa parte do livro era para métodos para cúbicas e o fim do livro ensinava a resolução das quárticas, desenvolvidas por Ferrari. Não há menção à Tartaglia como um dos responsáveis pelos métodos tratados no livro de Cardano.

O livro de Cardano fez grande sucesso e influência no estudo de álgebra. Uma das pessoas que estudaram-no foi Rafael Bombelli, um matemático de Roma que viveu entre 1526 e



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cos
sa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita
locupletatas, ut pro paucis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Ne
que solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus,
aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seor
sim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeti
cæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectan
dum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per
Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 5: Página de rosto de *Ars Magna*. Fonte: Wikipédia.

1572 d.C.. Uma das coisas que chamaram atenção de Bombelli foram os casos em que as equações cúbicas tinham soluções óbvias, mas aplicando o método de *Ars Magna* a resposta não era trivial. Por exemplo a equação

$$x^3 = 6x + 40,$$

tem uma solução óbvia que é $x = 4$. Já o método desenvolvido na publicação de Cardano gerava a resposta

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}.$$

Bombelli então analisou a solução do método através de raízes de números negativos, pois ele já havia percebido que estes aparecem em certas condições para aplicar o ensinado em *Ars Magna*. Trabalhando com raízes quadradas de números negativos como se fossem números 'normais', ele desenvolveu o início da aritmética complexa e dos números complexos. Esse é o vão apontado por Khayyam.

Escrevendo os números que aparecem na solução de Cardano na forma $a + \sqrt{b}$, para a e b números que podiam ser negativos, Bombelli foi capaz de demonstrar que

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4.$$

Mesmo tendo percebido esse padrão, Bombelli não acreditava no método que desenvolveu. De acordo com ele, trabalhar com raízes quadradas negativas 'é algo que aparenta ser baseado em sofisma ao invés da verdade'.

Outras contribuições de Bombelli para álgebra foram a publicação do livro *Algebra*, que


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
M D L X X I I.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Figura 6: Capa de *Algebra*, por Bombelli. Fonte: Wikipédia.

tinha o intuito de ser um livro mais fácil de aprender do que *Ars Magna*, e o desenvolvimento de notações matemáticas para números positivos, negativos e expoentes.

1.3 A resolução do problema

Pulando para os séculos 18 e 19, a matemática europeia tinha feito grandes avanços. Dos de nosso interesse encontram-se: desenvolvimento e uso dos números complexos, geometria analítica e teorias estudando divisibilidade.

Um dos matemáticos mais influentes, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tentou resol-

Figura 7: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Fonte: Wikipédia.

ver este problema. Ele tinha interesse maior em conseguir descrever algebricamente as soluções de equações ciclotômicas, isto é, as equações do tipo $x^n - 1 = 0$. Note que, naquela época, já era sabido que essas equações tinham n soluções dadas por $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$, porém essas funções não são algébricas, uma vez que podem ser pensadas como uma série com infinitos termos. Naturalmente ele percebeu que fazendo sucessivas mudanças de variáveis, usando a decomposição de n em fatores primos, era necessário apenas conseguir resolver as equações do tipo $x^p - 1 = 0$, onde $p \in \mathbb{N}$ é um número primo.

A partir de um método de resoluções das ciclotômicas usando equações auxiliares cujos graus eram dados pelos fatores primos de $p-1$, Gauss foi capaz de mostrar que as equações puras $x^n - a = 0$, com $a \in \mathbb{Q}$, podem ser resolvidas por radicais. Generalizando, foi capaz de mostrar que todas as equações misturáveis, que possuem termos não nulos de grau maior do que zero e menor do que n, que podiam ser reduzidas algebricamente para equações puras podem ser resolvidas por radicais. Note que esse é exatamente o processo pelo qual resolvemos as equações de grau dois usando o método de completar o quadrado, pois

$$x^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

e o lado direito da equivalência acima é uma equação pura.

Sobre as equações misturadas que não podiam ser reduzidas às puras, Gauss não conseguiu provar que era resolvíveis por radical. Sobre isso, ele disse

> Everyone knows that the most eminent geometers have been unsuccessful in the search for a general solution of equations higher than the fourth degree, or for the reduction of mixed equations to pure equations. And there is little doubt that this problem is not merely beyond the powers of contemporary analysis but proposes the impossible... Nevertheless, it is certain that there are innumerable mixed equations of every degree which admit a reduction to pure equations, and we trust that geometers will find it gratifying if we show that our equations are always of this kind. (Katz, 2009, p. 722)

A intuição de Gauss de que o problema da resolução por radicais de uma equação polinomial geral ser impossível mostrou-se acurada. Foi em meados dos anos 1820 que o jovem matemático Niels Henrik Abel (1802-1829) conseguiu mostrar a impossibilidade das equações de grau cinco serem resolvidas por radical, mostrando também a impossibilidade do problema mais geral. Após as suas descobertas, Abel tinha interesse em investigar as seguintes perguntas

- Classificar todas as equações, independente de grau, que são solúveis algebricamente.
- Decidir quando uma determinada equação admite resolução por radicais ou não.

Infelizmente Abel morreu muito jovem vítima de tuberculose e não conseguiu responder as perguntas acima. Apesar de sua morte precoce, Abel possuiu trabalhos de grande impacto o que fez com que o homenageassem no nome do prêmio Medalha Abel.

O trabalho que conseguiu responder as equações propostas por Abel foi desenvolvido por

Figura 8: Niels Henrik Abel (1802-1829). Fonte: Wikipédia.

outro jovem matemático: Evariste Galois (1811-1832). O trabalho de Galois consiste em um estudo mais sistemático de como as equações de uma solução podem ser permutadas entre si. Por exemplo, é sabido que a conjugação complexa leva as soluções de equações polinomiais com coeficientes reais em outras soluções (quando o número tem parte imaginária). Um exemplo que ilustra isso é a equação $x^2+1=0$ cujas soluções são i e $\bar{i}=-i$.

Figura 9: Evariste Galois (1811-1832). Fonte: Wikipédia.

A ideia de estudar permutações para entender as soluções de uma equação surgiu com Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mas foi Galois que conseguiu conectá-la com o que hoje conhecemos como grupos. Galois foi capaz de entender que uma equação poderia ser associada a uma extensão de corpos, chamada de corpo de raízes do polinômio em questão. Por sua vez, estudando os automorfismos de corpos do corpo de raízes que fixavam $\mathbb{Q}$, Galois percebeu que uma equação era solúvel por radicais se, e somente se, o seu grupo de automorfismos (hoje chamado de grupo de Galois) tinha uma propriedade de poder ser estudado usando quocientes que eram finitos e abelianos. Hoje entendemos isso por um grupo solúvel.

Galois faleceu tragicamente aos 20 anos em um duelo de motivação passional e/ou política, mas seu legado mudou o rumo dos estudos algébricos tornando-os mais parecidos com a Álgebra estudada atualmente.

Referências

[Gray and Parshall, 2011] Gray, J. J. and Parshall, K. H. (2011). *Episodes in the history of modern algebra (1800-1950)*, volume 32. American Mathematical Soc.

[Katz, 2009] Katz, V. J. (2009). *History of mathematics*. Pearson New York.

[Kleiner et al., 2007] Kleiner, I. et al. (2007). *A history of abstract algebra*. Springer Science & Business Media.

[Stillwell and Stillwell, 1989] Stillwell, J. and Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its History*, volume 3. Springer.