Maria de Lourdes da Silva Santos

MPM5615 - Tópicos de História da Matemática

Uma perspectiva educacional da história da álgebra

Dentro do tema história da álgebra, vamos primeiramente abordar a história da álgebra na educação brasileira; posteriormente iremos fazer algumas interligações entre a prática de sala de aula com o desenvolvimento da álgebra durante a história.

Antes de iniciarmos de fato a história da álgebra na educação brasileira é importante fazermos um retrospecto da história da educação no Brasil.

A educação no Brasil foi organizada pelos jesuítas por volta de 1549, sendo que nesse momento tinham a preocupado em ensinar a ler e escrever; portanto, não houve a preocupação de ensinar matemática. Dando um pulo e indo para 1800, apenas a elite tinha acesso à educação, que representava uma pequena parcela da sociedade. Já em 1824, com a primeira Constituição do, Brasil, é regularizado o ensino primário gratuito (artigo 179, n32), mas é importante ressaltar que mesmo sendo gratuito, muitas crianças não tinham acesso a escola, pois precisavam trabalhar para ajudar em casa.

Vamos comentar um ponto de maior importância para este trabalho, o conflito pedagógico entre as metodologias de ensino tradicional, libertaria e escola nova. Conforme Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) argumentam sobre o ensino de álgebra, existiram três momentos históricos diferentes no ensino de álgebra nos séculos XIX e XX, com características distintas que influenciaram o ensino:

- primeiro momento: transformismo algébrico;
- segundo momento: Matemática Moderna;
- terceiro momento: síntese entre as duas concepções.

É importante entender como surgiu a Matemática, em especial a álgebra, na sociedade e qual será a principal condição de existência dessa área de conhecimento. Segundo Coelho e Aguiar (2018):

> A Álgebra se consolidou como área de conhecimento, área essa que é, portanto, fruto de um desenvolvimento histórico e não inata ao ser humano. Dito de outra forma, o conhecimento da Álgebra precisa do meio social para ser aprendido e assimilado.

Partindo da análise de Coelho, destacamos que a álgebra surgiu pela necessidade de desenvolvimento social e não unicamente pela curiosidade humana ou pelo pensamento abstrato. Portanto, ao se estudar a história da álgebra ou quando se ensina álgebra, é fundamental ter bem definido o objetivo do ensino. Mas adiante iremos nos aprofundar neste assunto.

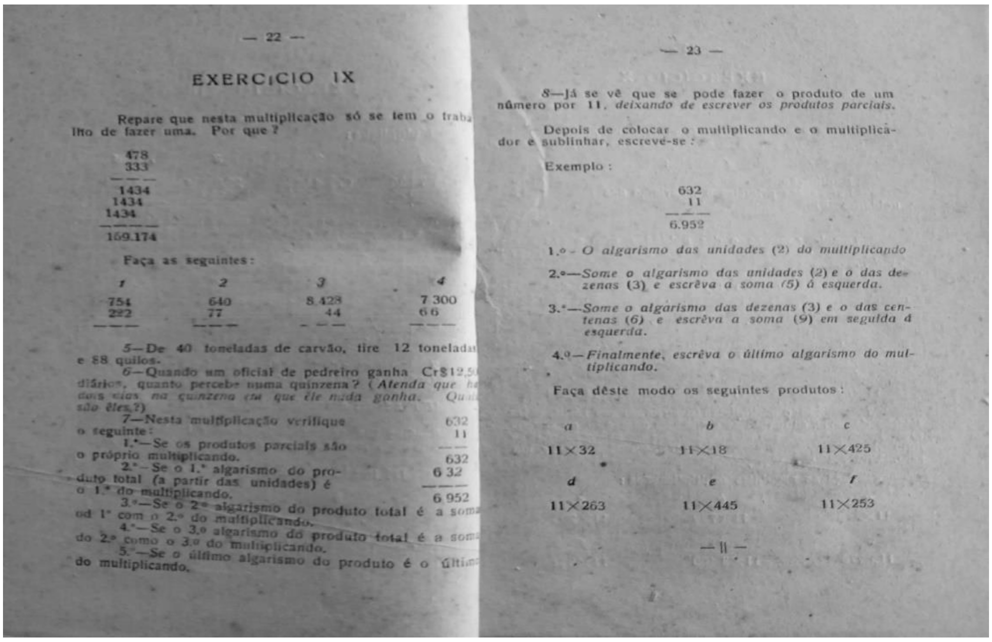
O primeiro momento do ensino de álgebra no Brasil, o transformismo algébrico, está intimamente relacionado com o ensino de aritmética. Blanton e Kaput (2005, p.413) categorizam quatro formas de pensamento algébrico:

> [...] o uso da aritmética como domínio da expressão e a formalização da generalização (aritmética generalizada); a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais (pensamento funcional); a modelação como um domínio para a expressão e formalização das generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações.

O transformismo algébrico está fortemente ligado as habilidades aritméticas anteriormente ensinada aos alunos. Nesse momento não se tinha a preocupação de desenvolver no aluno o raciocínio algébrico abstrato, apenas em desenvolver o pensamento funcional. As principais características do transformismo algébrico são as sequências de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações, chegando às equações, e assim as utilizando na resolução de problemas. É importante ressaltar que não se exigia grande raciocínio logico, apenas capacidade operacional.

Durante o século XIX e a primeira metade do século XX foi esta metodologia aplicada na educação de vários países e no Brasil. A pergunta a se fazer é, na história da álgebra foi essa a motivação principal de seu desenvolvimento? A resposta é obviamente não, mesmo sabendo que a álgebra é a generalização da aritmética. Nos anos de 813 e 833 foi feito o tratado “Livro da Restauração e do Balanceamento”, do matemático persa al-Khowarizmi. Nesta obra se tinha o objetivo de ensinar soluções para problemas matemáticos comuns do dia-a-dia de forma mais didática. Portanto, a principal motivação foi resolver problemas que dificultavam o desenvolvimento social.

Ilustrando esse momento, vemos no livro de Joaquim Santos (1945), mesmo sendo de aritmética, a necessidade de desenvolver no educando a habilidade funcional de reproduzir métodos aritméticos para mais adiante aplicá-los na aritmética (Figura 1 e Figura 2).



— 22 —

EXERCICIO IX

Repare que nesta multiplicação só se tem o traba lho de fazer uma. Por que?

```
   478
   333
  ----
  1434
 1434
1434
-------
169.174
```

Faça as seguintes:

1	2	3	4
754	640	8.428	7 300
222	77	44	66

5—De 40 toneladas de carvão, tire 12 tonelada e 88 quilos.

6—Quando um oficial de pedreiro ganha Cr$12,5 diários, quanto percebe numa quinzena? (*Atenda que ha dois dias na quinzena em que êle nada ganha. Qua são êles?*)

7—Nesta multiplicação verifique o seguinte:

```
  632
   11
 ----
  632
 632
 ----
6 952
```

1.°—Se os produtos parciais são o próprio multiplicando.

2.°—Se o 1.° algarismo do produto total (a partir das unidades) é o 1.° do multiplicando.

3.°—Se o 2.° algarismo do produto total é a soma od 1° com o 2.° do multiplicando.

4.°—Se o 3.° algarismo do produto total é a soma do 2.° como o 3.° do multiplicando.

5.°—Se o último algarismo do produto é o últim do multiplicando.

— 23 —

8—Já se vê que se pode fazer o produto de um número por 11, *deixando de escrever os produtos parciais.*

Depois de colocar o multiplicando e o multiplicador e sublinhar, escreve-se:

Exemplo:

```
  632
   11
 -----
 6.952
```

1.° *O algarismo das unidades (2) do multiplicando*

2.°—*Some o algarismo das unidades (2) e o das dezenas (3) e escrêva a soma (5) à esquerda.*

3.°—*Some o algarismo das dezenas (3) e o das centenas (6) e escrêva a soma (9) em seguida à esquerda.*

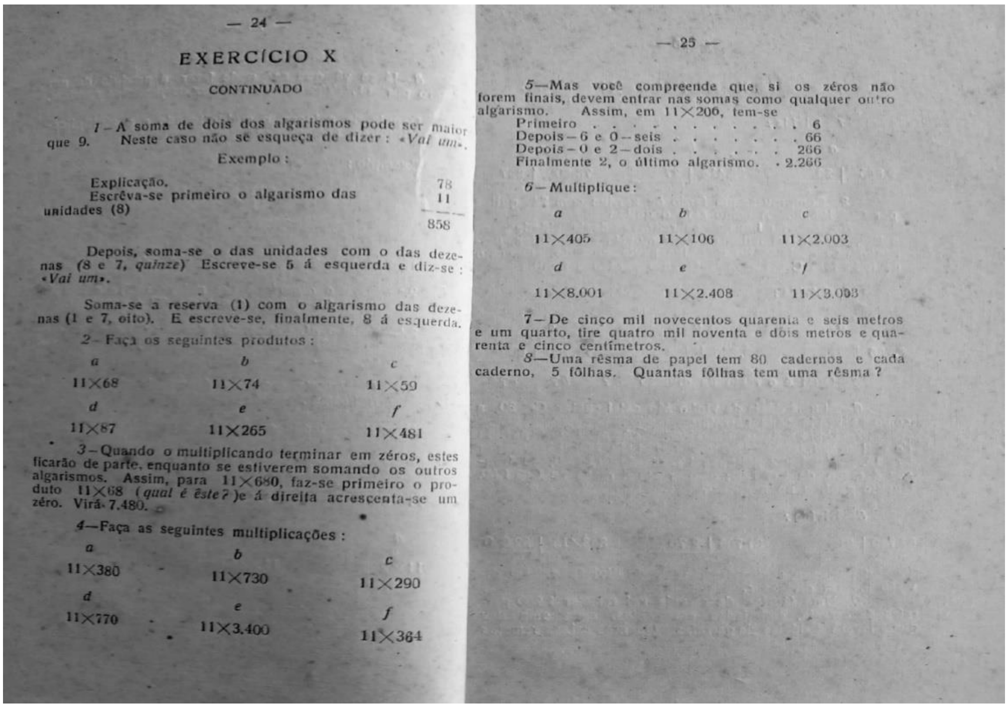
4.°—*Finalmente, escrêva o último algarismo do multiplicando.*

Faça dêste modo os seguintes produtos:

a	b	c
11×32	11×18	11×425
d	*e*	*f*
11×263	11×445	11×253

— II —

Figura 1. Livro de Joaquim Santos.



— 24 —

EXERCÍCIO X

CONTINUADO

1—A soma de dois dos algarismos pode ser maior que 9. Neste caso não se esqueça de dizer: «*Vai um*».

Exemplo:

Explicação.

Escrêva-se primeiro o algarismo das unidades (8)

```
 78
 11
---
858
```

Depois, soma-se o das unidades com o das dezenas (8 e 7, *quinze*) Escreve-se 5 á esquerda e diz-se: «*Vai um*».

Soma-se a reserva (1) com o algarismo das dezenas (1 e 7, oito). E escreve-se, finalmente, 8 á esquerda.

2—Faça os seguintes produtos:

a	b	c
11×68	11×74	11×59
d	*e*	*f*
11×87	11×265	11×481

3—Quando o multiplicando terminar em zéros, estes ficarão de parte, enquanto se estiverem somando os outros algarismos. Assim, para 11×680, faz-se primeiro o produto 11×68 (*qual é êste?*)e á direita acrescenta-se um zéro. Virá 7.480.

4—Faça as seguintes multiplicações:

a	b	c
11×380	11×730	11×290
d	*e*	*f*
11×770	11×3.400	11×364

— 25 —

5—Mas você compreende que, si os zéros não forem finais, devem entrar nas somas como qualquer outro algarismo. Assim, em 11×206, tem-se

Primeiro 6
Depois—6 e 0—seis 66
Depois—0 e 2—dois 266
Finalmente 2, o último algarismo. . 2.266

6—Multiplique:

a	b	c
11×405	11×106	11×2.003
d	*e*	*f*
11×8.001	11×2.408	11×3.003

7—De cinco mil novecentos quarenta e seis metros e um quarto, tire quatro mil noventa e dois metros e quarenta e cinco centímetros.

8—Uma rêsma de papel tem 80 cadernos e cada caderno, 5 fôlhas. Quantas fôlhas tem uma rêsma?

Figura 2. Livro de Joaquim Santos.

A metodologia usada no livro parte do princípio que se o aluno sabe ou decorou um algoritmo e é capaz de resolver o problema do tipo 7 e 8; destacamos que provavelmente alguns teriam dificuldade de conectar o algoritmo ao problema, baseado apenas nas informações desse livro.

Um segundo exemplo é o livro de Perez Y Marin (1909) que em seu prefacio apresenta:

> A recente publicação, que fizemos, da arithmética theorico-pratica, completamos agora com este segundo trabalho, vazado nos mesmos moldes do primeiro, de modo a estabelecer a desejada uniformidade de methodo nas duas disciplinas de arithmetica e álgebra, tão intimamente ligadas entre si.

Este livro já começa apresentando um problema, com duas soluções sendo a primeira aritmética (Figura 3) e a segunda algébrica (Figura 4).

> "Dividir 500$ entre três pessoas, de modo que a primeira receba 40$ mais que a segunda, e está 50$ mais que a terceira" (PEREZ Y MARIN, 1909, p.9).

Para resolver este problema sem os recursos da algebra, raciocinaremos assim:

Suppondo conhecida uma das tres partes, a da terceira pessoa, por exemplo, bastaria accrescentar a essa parte 50$ para ter a parte da segunda pessoa; e, depois, para ter a parte da primeira, accrescentariamos 40$ á segunda, ou 40$ mais 50$ egual a 90$ á terceira.

Por conseguinte, seja qual for a terceira parte, sabe-se que essa terceira parte mais 50$ é a segunda parte, e a mesma terceira parte mais 90$ compõem a primeira. A somma das tres partes será, pois, egual ao triplo da terceira mais 50$ mais 90$, ou mais 140$.

Ora, si o triplo da terceira parte mais 140$ é egual a 500$, segue-se que o triplo da terceira será egual a 500$ menos 140$, egual a 360$.

Dahi resulta que a terceira parte será um terço de 360$, egual a $\frac{360\$}{3} = 120\$000$. A segunda parte será, portanto, $120\$ + 50\$ = 170\$000$, e a primeira será $170\$ + 40\$ = 210\$000$.

Figura 3. Solução aritmética, Perez Y Marin (1909).

Mesmo estando dentro do primeiro momento do ensino de álgebra, já se tem a preocupação de desenvolver no aluno a habilidade de interpretar e compreender o problema. Mas quando ele vai para a resolução algébrica fica apenas na operacionalidade.

Resolvamos agora o mesmo problema, fazendo uso da linguagem algebrica.

Representando a terceira parte por x, a segunda será $x + 50\$$, e a terceira $x + 50\$ + 40\$$.

Sommando as tres partes, teremos: $x + x + 50\$ + x + 50\$ + 40\$ = 3x + 140\$$; e, como a somma das tres partes deve ser egual a 500\$, obtem-se a seguinte egualdade:

$$3x + 140\$ = 500\$.$$

Subtrahindo 140\$ de ambos os membros, tem-se:

$$3x + 140 - 140\$ = 500\$ - 140\$.$$

Simplificando, acha-se:

$$3x = 360\$,$$

donde $x = \frac{360\$}{3} = 120\$000.$

O problema fica assim resolvido, porque basta conhecer uma das tres partes para deduzir immediatamente as outras duas.

Figura 4. Solução algébrica, Perez Y Marin (1909).

Já no segundo momento, a matemática moderna em meados do século XX, a concepção de ensino prevalece à ideia de se justificar as passagens presentes no transformismo algébrico. Para isso,se faz uma introdução das propriedades estruturais das operações. Isso bastaria para se capacitar o estudante na identificação dessas estruturas em outros contextos, assim como nas suas aplicações. O enfoque principal era o domínio dos conceitos abstratos de “operação”, “relação”, “função”, relacionados ao produto cartesiano de dois conjuntos. O objetivo aqui é fortalecer as propriedades estruturais algébricas.

Vemos abaixo exemplos de uma atividade deste período (Figura 5):

Concepção fundamentalista-estrutural

Demonstre que: (a . b) : a = b

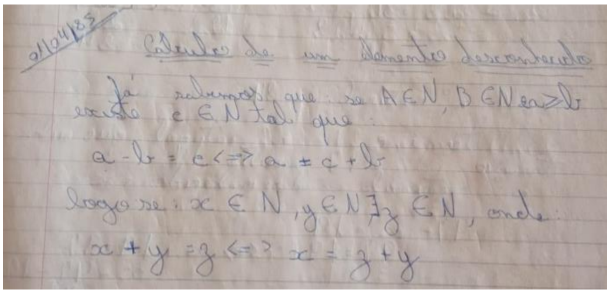
Transformação:

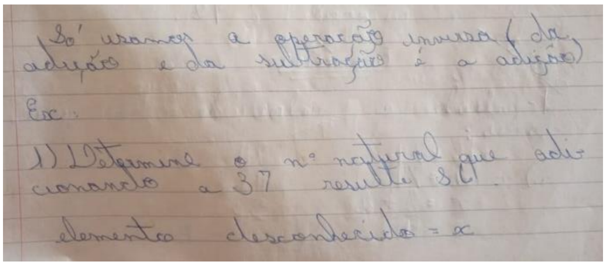
$$(a.b) : a = (b.a) : a = (b.a) . 1/a = b. (a.1/a) = b. (a.1/a) = b.1 = b$$

Propriedade:

- Comutativa;
- Definição divisor em R*;
- Associativa;

- Produto de elemento inversos;
- Elemento neutro.





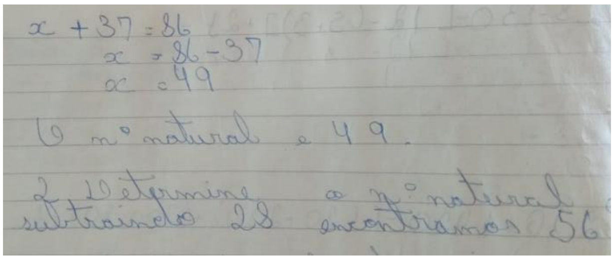


Figura 5. o caderno de um aluno do quinto ano de 1985, período da Matemática Moderna.

Já o terceiro momento do ensino de álgebra no Brasil é a síntese entre os dois momentos anteriores: o momento fundamentalista-analógica.

Neste momento, tanto o valor instrumental da álgebra quanto o caráter fundamentalista de justificação das passagens algébricas estão presentes, mas de forma lógico-estrutural. Essa nova estrutura de ensino foi fortemente influenciada pela corrente pedagógica do tecnicismo que molda o ensino até hoje.

As justificativas baseiam-se, em geral, em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Se tinha que uma “álgebra geométrica”, que seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. O ensino de Matemática no Brasil, atualmente, está neste terceiro momento, conforme definido por Fiorentini, Miguel e Miorim.

Nesse momento constatamos a utilização em sala de aula de alguns dos conceitos e aplicações desenvolvidos pelos matemáticos históricos (Viéte, Cardano, Tartaglia etc.).

As equações do segundo grau são um tema de grande relevância no nono ano do ensino fundamental, sendo utilizadas várias abordagens didáticas. Uma delas é o método geométrico utilizado por Al-Khwarizmi, muito usado pelos professores em sala de aula com o objetivo de o aluno visualizar uma resolução geométrica, acreditando ser uma abordagem mais didática. Entretanto, na abordagem pelos livros didáticos comumente não é feita uma contextualização histórica do método.

Temos a seguir um exmplo de atividade:

Dada a equação $x^2 + 6x = 27$ (Completando o quadrado) (Figura 6).

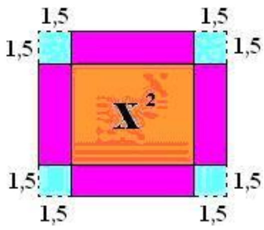
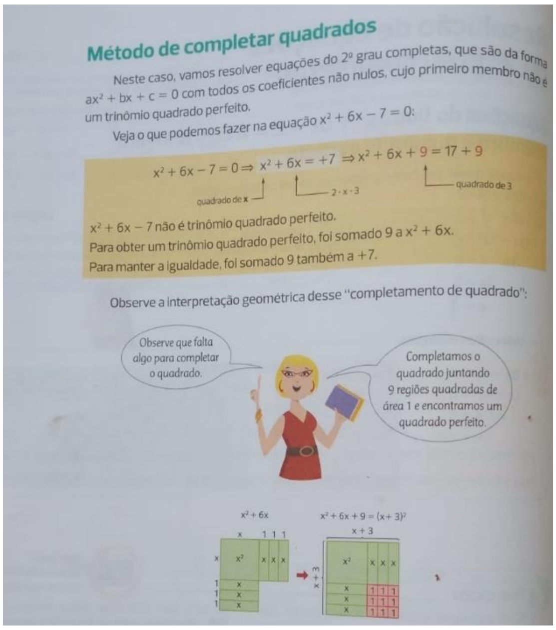


Figura 6. Completando o quadrado

Este método aparece de diferentes formas no livro didático, a imagem acima (Figura 6) é a mais tradicional quando pensamos na história da álgebra, mas existe outras como segue abaixo (Figuras 7 e 8).



Método de completar quadrados

Neste caso, vamos resolver equações do 2º grau completas, que são da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com todos os coeficientes não nulos, cujo primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito.

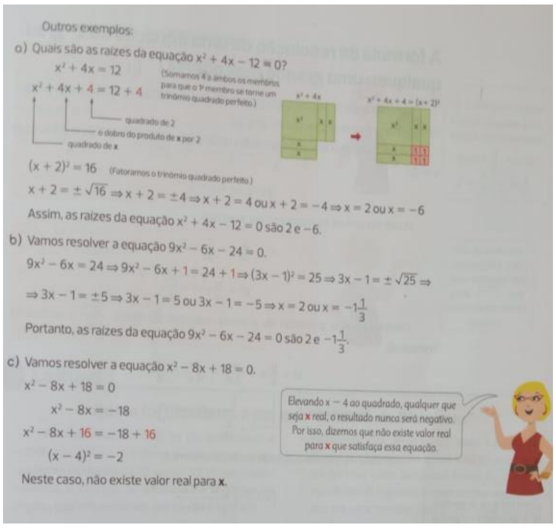
Veja o que podemos fazer na equação $x^2 + 6x - 7 = 0$:

$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = +7 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 17 + 9$

quadrado de **x**; $2 \cdot x \cdot 3$; quadrado de 3

$x^2 + 6x - 7$ não é trinômio quadrado perfeito.
Para obter um trinômio quadrado perfeito, foi somado 9 a $x^2 + 6x$.
Para manter a igualdade, foi somado 9 também a +7.

Observe a interpretação geométrica desse "completamento de quadrado":



Outros exemplos:

a) Quais são as raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$?

$x^2 + 4x = 12$

$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ (Somamos 4 a ambos os membros para que o 1º membro se torne um trinômio quadrado perfeito.)

quadrado de 2; o dobro do produto de **x** por 2; quadrado de **x**

$(x + 2)^2 = 16$ (Fatoramos o trinômio quadrado perfeito.)

$x + 2 = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x + 2 = \pm 4 \Rightarrow x + 2 = 4$ ou $x + 2 = -4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -6$

Assim, as raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$ são 2 e −6.

b) Vamos resolver a equação $9x^2 - 6x - 24 = 0$.

$9x^2 - 6x = 24 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 24 + 1 \Rightarrow (3x - 1)^2 = 25 \Rightarrow 3x - 1 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 1 = \pm 5 \Rightarrow 3x - 1 = 5$ ou $3x - 1 = -5 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1\frac{1}{3}$

Portanto, as raízes da equação $9x^2 - 6x - 24 = 0$ são 2 e $-1\frac{1}{3}$.

c) Vamos resolver a equação $x^2 - 8x + 18 = 0$.

$x^2 - 8x + 18 = 0$

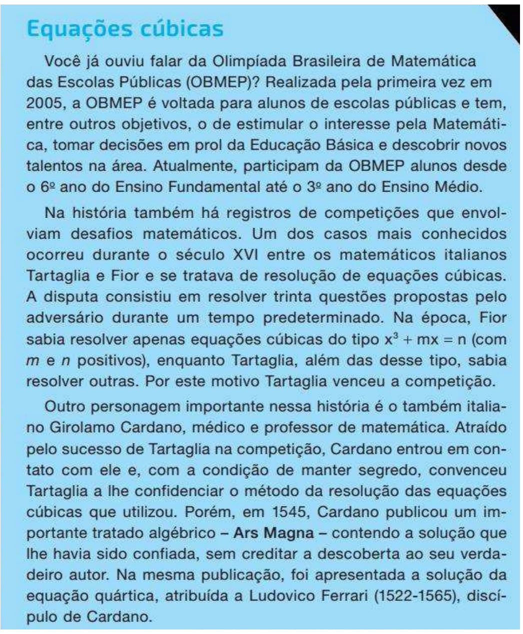
$x^2 - 8x = -18$

$x^2 - 8x + 16 = -18 + 16$

$(x - 4)^2 = -2$

Neste caso, não existe valor real para **x**.

Figura 7. Livro: Projeto Teláris, 9°ano, PNLD2014, 2016

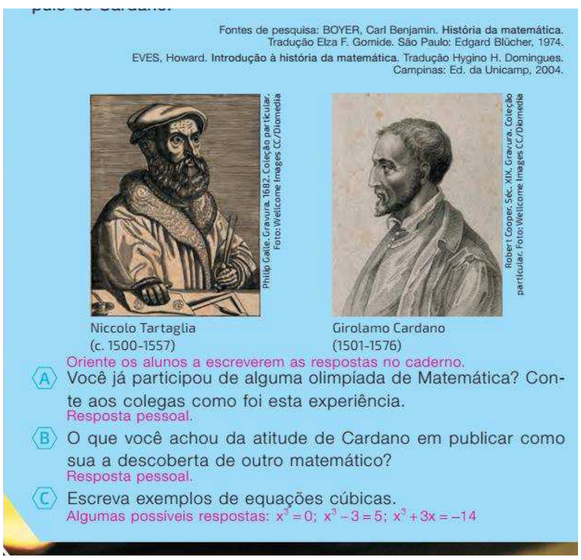


Equações cúbicas

Você já ouviu falar da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)? Realizada pela primeira vez em 2005, a OBMEP é voltada para alunos de escolas públicas e tem, entre outros objetivos, o de estimular o interesse pela Matemática, tomar decisões em prol da Educação Básica e descobrir novos talentos na área. Atualmente, participam da OBMEP alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio.

Na história também há registros de competições que envolviam desafios matemáticos. Um dos casos mais conhecidos ocorreu durante o século XVI entre os matemáticos italianos Tartaglia e Fior e se tratava de resolução de equações cúbicas. A disputa consistiu em resolver trinta questões propostas pelo adversário durante um tempo predeterminado. Na época, Fior sabia resolver apenas equações cúbicas do tipo $x^3 + mx = n$ (com *m* e *n* positivos), enquanto Tartaglia, além das desse tipo, sabia resolver outras. Por este motivo Tartaglia venceu a competição.

Outro personagem importante nessa história é o também italiano Girolamo Cardano, médico e professor de matemática. Atraído pelo sucesso de Tartaglia na competição, Cardano entrou em contato com ele e, com a condição de manter segredo, convenceu Tartaglia a lhe confidenciar o método da resolução das equações cúbicas que utilizou. Porém, em 1545, Cardano publicou um importante tratado algébrico – **Ars Magna** – contendo a solução que lhe havia sido confiada, sem creditar a descoberta ao seu verdadeiro autor. Na mesma publicação, foi apresentada a solução da equação quártica, atribuída a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano.



Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. História da matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Philip Galle. Gravura. 1682. Coleção particular. Foto: Wellcome Images CC/Diomedia

Niccolo Tartaglia
(c. 1500-1557)

Robert Cooper. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: Wellcome Images CC/Diomedia

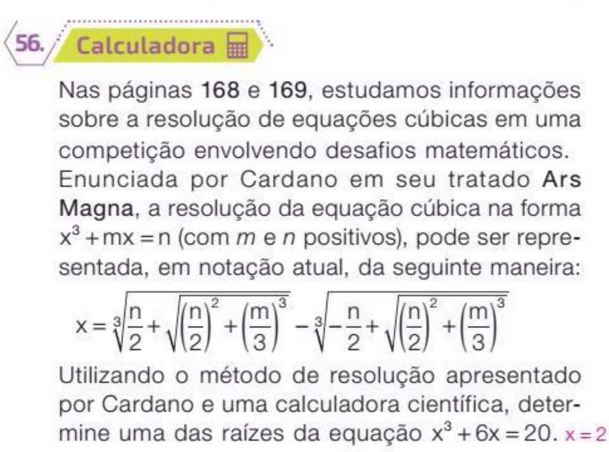
Girolamo Cardano
(1501-1576)

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

A) Você já participou de alguma olimpíada de Matemática? Conte aos colegas como foi esta experiência.
Resposta pessoal.

B) O que você achou da atitude de Cardano em publicar como sua a descoberta de outro matemático?
Resposta pessoal.

C) Escreva exemplos de equações cúbicas.
Algumas possíveis respostas: $x^3 = 0$; $x^3 - 3 = 5$; $x^3 + 3x = -14$



56. Calculadora

Nas páginas **168** e **169**, estudamos informações sobre a resolução de equações cúbicas em uma competição envolvendo desafios matemáticos. Enunciada por Cardano em seu tratado **Ars Magna**, a resolução da equação cúbica na forma $x^3 + mx = n$ (com *m* e *n* positivos), pode ser representada, em notação atual, da seguinte maneira:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Utilizando o método de resolução apresentado por Cardano e uma calculadora científica, determine uma das raízes da equação $x^3 + 6x = 20$. $x = 2$

Figura 8. Livro: contato matemática, 3°ano, FTD, 2016

Outro método utilizado para resolução de equações do segundo grau, agora indo para um direcionamento mais algébrico, é o método utilizado por François Viète. Para resolver a equação $x^2 + 2ax = b$, ele propôs uma mudança de variáveis, que transformava a equação inicial em uma equação incompleta.

1. Seja $x + a = u$
2. Então $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. Pela equação dada $x^2 + 2ax = b$, ou seja, $u^2 = b + a^2$
4. Logo $(x = a)^2 = u^2 = b = a$ e $x = \sqrt{b + a^2} - a$
5.

Viète também propôs uma solução para equações do tipo $x^2 + bx + c = 0$.

Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equações do 2.º grau. Seja $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Tome $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, substituindo na equação dada, temos:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

E reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Anulando o cieficiente Viète transformou essa equação numa equação incompleta do 2.° grau.

Tomando $u = \frac{-b}{2a}$, chega a seguinte equação:

$$av^a + a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

Realizando simples manipulações chega se a $v^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Tendo $b^2 - 4ac \geq 0$, então $v = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, logo $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a^c}}{2a}$

Essa fórmula é conhecida como a Formula de Bhaskara. O método de Viète possibilita ao professor uma demonstração mais algébrica e a oportunidade de propor uma resolução que foge da pura aplicação da fórmula que é o mais usual nas salas de aula. Entretanto, com uma breve pesquisa e a partir da minha experiencia com livros didáticos e sala de aula, percebo que não se é apresentado de forma analítica o conteúdo, mesmo quando está presente no livro didático. Neste caso, o docente opta por usar um método mais sintético. Que já foge de uma linha pedagógica mais atual.

Segundo Perez, as resoluções analíticas são mais intuitivas aos alunos auxiliando no desenvolvimento do raciocínio, mas o método sintético não é deixado de lado.

> Na resolução de todas as questões adotamos de preferência o método analítico como sendo o mais natural e mais adequado ao desenvolvimento do raciocínio,

> sem, todavia, olvidar o método sintético, que, pelo seu caráter empírico, não possui valor educativo, consiste, no entanto, um complemento imprescindível, não só pela necessidade de resumir em breves preceitos a operação analítica que exige longo raciocínio, como pela inapreciável comodidade que proporciona nos usos da vida prática” (PEREZ Y MARIN, 1939, prefácio).

O conflito pedagógico está fortemente presente nos dias de hoje, não somente nas relações interpessoal, mas também da relação entre docente e livro didático, isto é, na escola da metodologia pedagógica a seguir fato este já evidenciado em 1922.

Outras constatações que pude tirar durante a breve pesquisa para elaboração desse texto são:

- Não há uma ruptura de um período com o outro de imediato;
- Os livros didáticos do ensino fundamental e médio não dão ênfase nos matemáticos, apenas no terceiro período que começa a se dar méritos e interligar o matemático ao seu método;
- No ensino de álgebra não se pode fugir da linguagem algébrica e de procedimentos rigorosos;
- O pensamento abstrato ainda é um grande problema no ensino de álgebra, que faz com que muitas vezes o docente reforce o primeiro momento de ensino confiando na capacidade do aulo de decorar procedimentos.

Referências Bibliográficas

COELHO, Flávio Ulhôa; AGUIAR, Marcia. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. Estudos Avançados, v. 32, p. 171-187, 2018.

MILIES, César Pocinho. Breve história da álgebra abstrata. Minicurso apresentado na II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática–SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de história da matemática. 2012.

BORTOLI, Adriana. Uma análise dos livros de André Perez Y Marin: um momento da história da matemática escolar brasileira no início do século XX. 2016. Tese de Doutorado.

DANTE, L. R. Projeto Teláris – Matemática. 9º ano. São Paulo; Ática; 2014.SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. # Contato Matemática. 1.ed. São Paulo: FTD, 2016. Vol. 3.

PEREZ Y MARIN, A. Arithmetica Theorico-Pratica. 9ª ed. São Paulo: Escolas Profissionais do Lyceu Coração de Jesus, 1928.

SANTOS, Joaquim. Aritmética graduada para a Escola primária. 3° edição. Maranhão, Tipografia M. Silva, 1945.