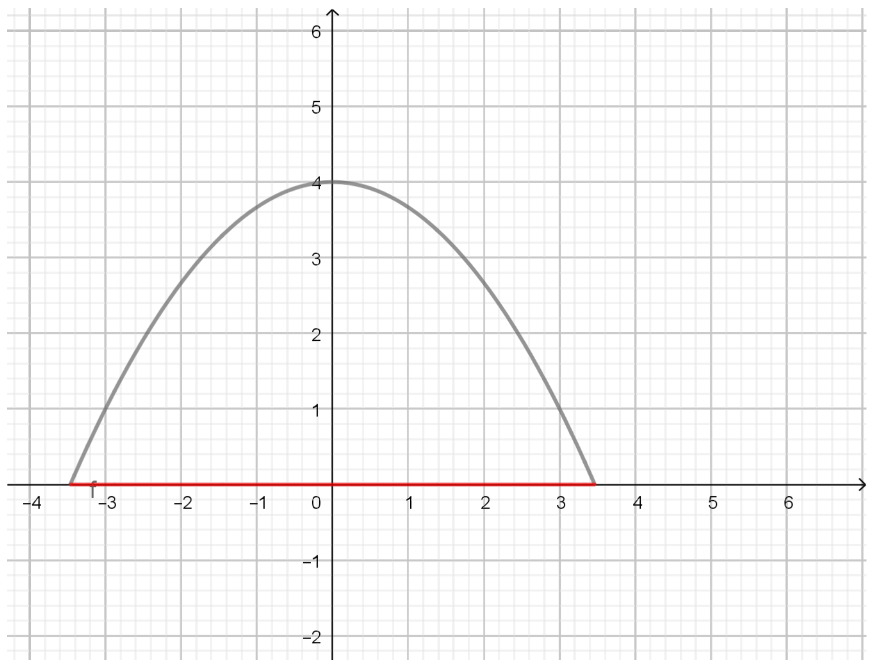
Resolução da Prova P3 de MAT-121

(1) (2,0 pontos) Determine os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no conjunto compacto $D = \{(x, y) : x^2 + 3y \leq 12, y \geq 0\}$.



(I) Comecemos procurando candidatos a pontos extremantes no interior da região D.
São os pontos que anulam as derivadas parciais da função.

Temos: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.

e $4x = 0$ e $2y = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y = 0$. O ponto $(0, 0)$ não est no interior de D, mas pertence à fronteira de D. Portanto, é um candidato a ponto extremante.

Agora vamos procurar os candidatos que estão na fronteira de D, que é formada por um arco de parábola e um segmento.

(II) Consideremos o segmmento definido por $y = 0$, com $-2\sqrt{3} \leq \ x \leq \ 2\sqrt{3}$.

Para $y = 0$, a função f fica $z = f(x, 0) = 2x^2$, que tem ponto de mínimo para $x = 0$ e ponto de máximo em $-2\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$. Portanto, os candidatos obtidos deste segmento são os pontos $(0, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$ e $(2\sqrt{3}, 0)$.

(III) Consideremos o arco de parábola $y = \dfrac{12 - x^2}{3}$, com $-2\sqrt{3} \leq \ x \leq \ 2\sqrt{3}$. Na parábola, podemos usar multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x^2 + y^2 \\ g(x, y) = x^2 + 3y = 12 \end{cases}$$

Os candidatos estão entre aqueles que tornam os gradientes de f e g linearmente independentes. Temos:

$$\left.\begin{cases} \nabla f(x, y) = (4x, 2y) \\ \nabla g(x, y) = (2x, 3) \end{cases}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 4x & 2y \\ 2x & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\leftrightarrow\; 12x - 4xy = 0 \;\leftrightarrow\; 4x(3-y) = 0 \;\leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } y = 3.$$

Temos que $x^2 + 3y = 12$. Dessa forma,

$x = 0 \;\rightarrow\; 3y = 12 \;\rightarrow\; y = 4$, e temos o candidato $(0, 4)$.

$y = 3 \;\rightarrow\; x^2 + 9 = 12 \;\rightarrow\; x^2 = 3 \;\rightarrow\; x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$, e os candidatos são os pontos $(-\sqrt{3}, 3)$ e $(\sqrt{3}, 3)$.

Para saber sobre os pontos de máximo e de mínimo, vamos calcular o valor da função f nos candidatos encontrados.

$$\begin{cases} f(x,y) = 2x^2 + y^2 \\ f(0,0) = 0 \\ f(0,4) = 16 \\ f(\sqrt{3},3) = f(-\sqrt{3},3) = 15 \\ f(-2\sqrt{3},0) = f(2\sqrt{3},0) = 24 \end{cases}$$

$$\text{Conclusão: } \begin{cases} \begin{cases} \text{pontos de máximo: } (2\sqrt{3},0) \text{ e } (-2\sqrt{3},0) \\ \text{máximo : } 24 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \text{pontos de mínimo: } (0,0) \\ \text{mínimo : } 0 \end{cases} \end{cases}$$

(2) (2,5 pontos) Determine os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = 3x + 3yz$ sobre a elipse definida por interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = y$.

Solução: a elipse é um conjunto compacto e a função f é contínua. Portanto, existem pontos de máximo e de mínimo absolutos.

Vamos usar multiplicadores de Lagrange com duas restrições: $x^2 + y^2 = 1$ e $z = y$.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 3x + 3yz \\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1 \\ h(x,y,z) = y - z = 0 \end{cases}$$

Temos que $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = (3, 3z, 3y) \\ \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 0) \\ \nabla h(x,y,z) = (0, 1, -1) \end{cases}$

e os candidatos a pontos extremantes estão entre os que anulam o determinante da matriz cujas linhas são formadas pelosvgradientes de f, g, h.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3z & 3y \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad xy + xz - y = 0$$

Como $z = y$, a equação acima fica $2xy - y = 0 \leftrightarrow\ y(2x-1) = 0 \leftrightarrow\ y = 0$ *ou* $x = \frac{1}{2}$.

Caso 1: $y = 0$. Como $x^2 + y^2 = 1$, obtemos $x = -1$ ou $x = 1$. Sendo $z = y$, os candidatos são $(-1,0,0)$ e $(1,0,0)$.

Caso 2: $x = \frac{1}{2}$. De novo, como $x^2 + y^2 = 1$, substituindo $x = \frac{1}{2}$, obtemos $y^2 = \frac{3}{4}$, e portanto, temos os pontos $(\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Calculando a função f em tais candidatos, obtemos:

$$f(x,y,z) = 3x + 3yz \begin{cases} f(1,0,0) = 3 \\ \\ f(-1,0,0) = -3 \\ \\ f(\dfrac{1}{2}, +\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{15}{4} > 3 \\ \\ f(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{15}{4} > 3 \end{cases}$$

Conclusão:

pontos de máximo: $(\dfrac{1}{2}, +\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

máximo: $\dfrac{15}{4}$

ponto de mínimo: $(-1,0,0)$

mínimo: -3

(3) (1,0 ponto) Seja $f(x,y) = x^3y + \dfrac{4x}{y}$.

(i) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)$, sendo $\vec{u}$ o versor de $3\vec{i} - 4\vec{j}$.

(ii) De todas as retas tangentes ao gráfico da função f no ponto $(1, 2, f(1,2))$, determine aquela que forma ângulo máximo com o plano xy.

Solução:

(i) Como a função f é diferenciável, podemos usar a fórmula que fornece a derivada direcional da funo no ponto $(1,2)$:

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \nabla f(1,2) \bullet\ \vec{u}$.

Temos que $\vec{u} = \dfrac{(3,-4)}{5} = (\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5})$.

Além disso, $\nabla f(x,y) = (3x^2y + \dfrac{4}{y}, x^3 - \dfrac{4x}{y^2})$

e portanto, $\nabla f(1,2) = (8,0)$.

Dessa forma, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = (8,0) \bullet (\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}) = \dfrac{24}{5}$

(ii) A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1,2)) = (1,2,4)$ forma ângulo máximo com o plano xy pode ser dada com direção de vetor

$\vec{v} = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2), \|\nabla f(1,2)\|^2)$

ou seja,

$(x,y,z) = (1,2,4) + t(8,0,64), \quad t \in \mathbb{R}$.

(4) (2,0 pontos)

(i) Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável tal que $f(t^3, t^2+2) = t^4 - 3t^2 + t$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,3) = -\sqrt{2}$, para $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3, f(1,3))$.

Solução:

Temos que

$$f(t^3, t^2+2) = t^4 - 3t^2 + t \qquad (*)$$

Para $t = 1$, obtemos $f(1,3) = -1$.

Derivando ambos os membros de (*) em relação a t:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^3, t^2+1).3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^3, t^2+1).2t = 4t^3 - 6t + 1$$

Fazendo $t = 1$. obtemos a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3).3 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3).2 = -1 \qquad (1)$$

A derivada direcional de f no ponto $(1,3)$ na direção do vetor $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ vale $-\sqrt{2}$.

Como f é diferenciável, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3).\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3).(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$$

e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -2 \qquad (2)$$

Designando $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \alpha$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \beta$ e reescrevendo as equações (1) e (2), ficamos com o sistema

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = -1 \\ \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases}$$

que nos dá $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 3, f(1,3))$ é

$z = f(1,3) = \alpha(x-1) + \beta(y-3)$, isto é,

$z = -1 + (-1)(x-1) + 1(y-3) \quad$ ou $\quad x - y + z + 3 = 0$.

(ii) Seja S o elipsóide definido por $x^2 + 3(y-2)^2 + (z+2)^2 = 5$. Determine o plano tangente à superfície S no ponto $(1, 3, -1)$.

Solução:

O elipsóide é superfície de nível 5 da função $g(x,y,z) = x^2 + 3(y-2)^2 + (z+2)^2$ e o ponto $(1,3,-1)$ é um ponto desta superfície.

Temos que $\nabla g(x,y,z) = (2x, 6(y-2), 2(z+2))$, e portanto $\nabla g(1,3,-1) = (2,6,2)$.

Logo, a equação do plano é

$2(x-1) + 6(y-3) + 2(z+1) = 0 \quad$ ou $\quad x + 3y + z - 9 = 0$.

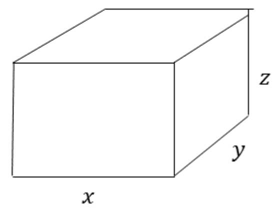
(iii) A curva γ tem o traço contido na interseção do gráfico de f (função do item (i)) com a superfície S (do item (ii)). Determine a reta tangente à curva γ no ponto $(1, 3, -1)$.

Solução: a curva γ tem o traço contido na superfície do elipsóide e na superfície dada por $f(x, y) - z = 0$. Logo, o vetor diretor $\vec{v}$ da reta tangente à curva no ponto $(1, 3, -1)$ é normal aos vetores normais a estas duas superfícies. Temos que $(2, 6, 2)$ é vetor normal ao elipsóide no ponto $(1, 3, -1)$. O vetor $(-1, 1, -1)$ énormal ao gráfico de f no ponto $(1, 3, -1)$. Assim, $\vec{v}$ pode ser qualquer vetor paralelo ao produto vetorial dos dois vetores normais citados. Temos:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad = \quad (8, 0, -8)$$

e a reta tangente pode ser dada por $(x, y, z) = (1, 3, -1) + t(8, 0, -8), \quad t \in \mathbb{R}$.

(5) (2,5 pontos) Deseja-se construir uma caixa retangular de volume igual a $180m^3$. O material da base da caixa custa 2 reais o metro quadrado, e o material da tampa e das faces laterais custa 3 reais o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizam o seu custo.



Solução:

A base tem medida xy. Como cada metro quadrado custa 2 reais, o preço da base é $2xy$. A tampa tem medida xy e temos duas faces laterais de medida xz e duas faces laterais de medida yz. Para a tampa e estas faces laterais, cada metro quadrado custa 3 reais.
Logo, o preço é $3xy + 3.(2xz) + 3.(2yz)$. O custo total é dado por
$f(x, y, z) = 2xy + 3(xy + 2xz + 2yz) = 5xy + 6xz + 6yz$.

Temos o problema de encontrar o mínimo da função f com a condição do volume da caixa ser igual a $180m^3$.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 5xy + 6xz + 6yz \\ \\ g(x,y,z) = xyz = 180 \end{cases}$$

Os candidatos a ponto de mínimo deve estar entre aqueles que anulam o produto vetorial de ∇f e ∇g. Então temos:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5y+6z & 5x+6z & 6x+6y \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \vec{0} \leftrightarrow \begin{cases} xy(5x+6z) - xz(6x+6y) = 0 \\ yz(6x+6y) - xy(5y+6z) = 0 \\ xz(5y+6z) - yz(5x+6z) = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y + 6xyz - 6x^2z - 6xyz = 0 \\ 6xyz + 6y^2z - 5xy^2 - 6xyz = 0 \\ 5xyz + 6xz^2 - 5xyz - 6yz^2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2(5y - 6z) = 0 \\ y^2(6z - 5x) = 0 \\ z^2(6x - 6y) = 0 \end{cases}$$

Como $x, y, z > 0$ (pois são medidas de lados), concluimos que

$$\begin{cases} 5y = 6z \\ 6z = 5x \\ 6x = 6y \end{cases} \quad \text{e portanto, } 5y = 6z = 5x\text{, donde resulta } y = x \text{ e } z = \frac{5x}{6}.$$

$xyz = 180 \rightarrow xx\dfrac{5x}{6} = 180 \rightarrow 5x^3 = 6.180 \rightarrow x = 6$. Logo, $x = y = 6$ e $z = 5$ são as dimensões da caixa que minimizam o seu custo.