ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

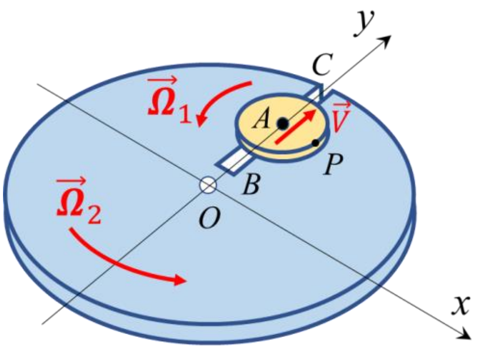
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 21 de Dezembro de 2021

Duração da Prova: 140 minutos (Início: 15:40 – Término: 18:00)

Questão 1 (3,5 pontos). O sistema mostrado na figura é composto pelo disco de centro O e raio $4R$, e por um disco de centro A e raio R. No instante considerado, o disco de centro O gira ao redor do ponto O com vetor de rotação $\vec{\mathbf{\Omega}}_2 = \Omega_2\vec{\mathbf{k}}$, constante, e o disco de centro A gira ao redor do ponto A com vetor de rotação $\vec{\mathbf{\Omega}}_1 = \Omega_1\vec{\mathbf{k}}$, constante. Neste mesmo instante, o disco de centro A desloca-se ao longo de um rasgo BC no disco de centro O, com a velocidade $\vec{\boldsymbol{V}} = V\vec{\mathbf{j}}$, constante. Considere que o sistema de referência móvel $Oxyz$ é solidário ao disco de centro O e que P é um ponto da periferia do disco de centro A, com coordenadas $(R, 2R, 0)$. Nestas condições, e para o instante considerado, calcule e escreva suas respostas utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$.



(a) A velocidade relativa do ponto P. **(0,5 ponto)**
(b) A velocidade de arrastamento do ponto P. **(0,5 ponto)**
(c) A aceleração relativa do ponto P. **(0,5 ponto)**
(d) A aceleração de arrastamento do ponto P. **(0,5 ponto)**
(e) A aceleração de Coriolis do ponto P. **(0,5 ponto)**
(f) O vetor de rotação absoluta do disco de centro A. **(0,5 ponto)**
(g) O vetor aceleração rotacional absoluta do disco de centro A. **(0,5 ponto)**

RESOLUÇÃO

<u>Movimento relativo: do disco de centro A</u>

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{A_{rel}} = V\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{P_{rel}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{A_{rel}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge (P - A) = V\vec{\mathbf{j}} + \Omega_1\vec{\mathbf{k}} \wedge R\vec{\mathbf{i}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_{P_{rel}} = (V + \Omega_1 R)\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{A_{rel}} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_{P_{rel}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{A_{rel}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_1 \wedge (P - A) + \vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_1 \wedge (P - A)\right] = \Omega_1\vec{\mathbf{k}} \wedge \Omega_1 R\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{P_{rel}} = \left(-\Omega_1{}^2 R\right)\vec{\mathbf{i}}$$

<u>Movimento de arrastamento: do disco de centro O</u>

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{O_{arr}} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{A_{arr}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{O_{arr}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (A - O) = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge 2R\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_{A_{arr}} = (-2\Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{P_{arr}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{O_{arr}} + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (P - O) = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(R\vec{\mathbf{i}} + 2R\vec{\mathbf{j}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_{P_{arr}} = (-2\Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}} + (\Omega_2 R)\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{A_{arr}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{O_{arr}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_2 \wedge (A - O) + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (A - O)\right] = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge -2\Omega_2 R\vec{\mathbf{i}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{A_{arr}} = \left(-2\Omega_2{}^2 R\right)\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_{P_{arr}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{O_{arr}} + \dot{\vec{\mathbf{\Omega}}}_2 \wedge (P - O) + \vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \left[\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge (P - O)\right] = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(-2\Omega_2 R\vec{\mathbf{i}} + \Omega_2 R\vec{\mathbf{j}}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{P_{arr}} = \left(-\Omega_2{}^2 R\right)\vec{\mathbf{i}} - \left(2\Omega_2{}^2 R\right)\vec{\mathbf{j}}$$

<u>Acelerações de Coriolis:</u>

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{A_{Cor}} = 2\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \vec{\boldsymbol{v}}_{A_{rel}} = 2\Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge V\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{A_{Cor}} = (-2\Omega_2 V)\vec{\mathbf{i}}$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_{P_{Cor}} = 2\vec{\mathbf{\Omega}}_2 \wedge \vec{\boldsymbol{v}}_{P_{rel}} = 2\Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge (V + \Omega_1 R)\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}}_{P_{Cor}} = -2(\Omega_2 V + \Omega_2\Omega_1 R)\vec{\mathbf{i}}$$

<u>Composição de Movimentos</u>

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{A_{abs}} = (-2\Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}} + V\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{P_{abs}} = (-2\Omega_2 R)\vec{\mathbf{i}} + (V + \Omega_1 R + \Omega_2 R)\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{A_{abs}} = (-2\Omega_2 V)\vec{\mathbf{i}} - \left(2\Omega_2{}^2 R\right)\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_{P_{abs}} = -\left(\Omega_2{}^2 R + \Omega_1{}^2 R + 2\Omega_2 V - \Omega_2\Omega_1 R\right)\vec{\mathbf{i}} - \left(2\Omega_2{}^2 R\right)\vec{\mathbf{j}}$$

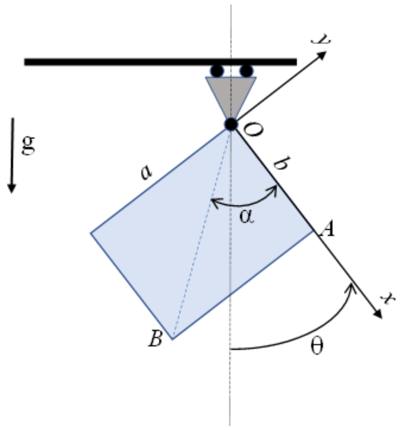
$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = (\Omega_1 + \Omega_2)\vec{\mathbf{k}}$$
$$\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{abs} = \Omega_2\vec{\mathbf{k}} \wedge \Omega_1\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

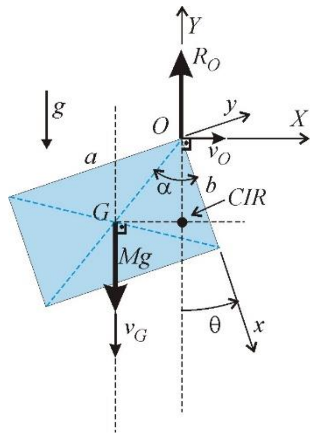
Questão 2 (3,0 pontos). O sistema plano da figura mostra uma placa retangular homogênea de espessura constante de massa M. A placa é suspensa por um apoio simples em O e o ângulo θ é medido entre a aresta OA e a reta vertical que passa por O. O sistema de coordenadas $Axyz$ é solidário ao plano médio da placa e o ângulo α é medido entre a aresta OA e a diagonal OB da placa. Dado que o corpo rígido é liberado a partir do repouso com $\theta(0) = 0$, pede-se (utilize $J_{Gz} = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$):



(a) As coordenadas do Centro Instantâneo de Rotação (CIR) da placa no instante em que o seu centro de massa G passa pela reta vertical que passa por O. **(1,0 ponto)**
(b) O deslocamento d do ponto O no instante em que G e O estão sobre a mesma vertical pela primeira vez (coloque o sinal de "menos" se o deslocamento for para a esquerda). **(0,5 ponto)**
(c) O valor máximo da velocidade angular da placa considerando $b = a$, ou seja, uma placa quadrada de lado a. **(1,0 ponto)**
(d) O valor de θ, em graus, quando a velocidade angular do corpo se anula pela primeira vez após o início do movimento, considerando novamente $b = a$. **(0,5 ponto)**

RESOLUÇÃO

a) Teorema da Resultante (TR): $m\vec{\boldsymbol{a}}_G = (R_O - Mg)\vec{\mathbf{j}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}}_G = a_G\vec{\mathbf{j}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}}_G = v_G\vec{\mathbf{j}}$, ou seja, o centro de massa G move-se apenas verticalmente. A figura ao lado mostra graficamente a posição do CIR, e pode-se verificar que, quando G e O estão na mesma vertical, o CIR coincide com G. Assim, no sistema de coordenadas dado, nesse instante:



$$(CIR - O) = \frac{b}{2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{a}{2}\vec{\mathbf{j}}$$

b) No início, com $\theta(0) = 0$, o ponto O está à direita de G, a uma distância de $a/2$ da sua vertical. Como o ponto G não se move lateralmente, o ponto O terá que se deslocar para a esquerda, dessa mesma distância, Portanto:

$$d = -\frac{a}{2}$$

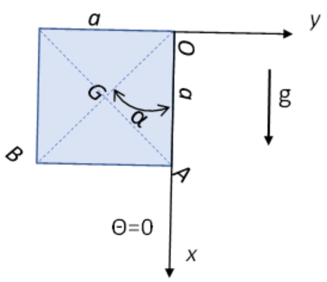
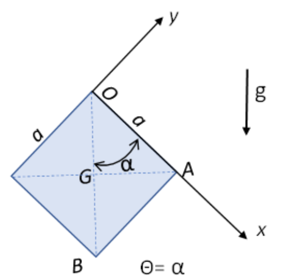
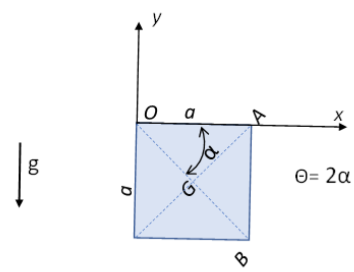
c) A variação da energia potencial (peso) será:

$$Mg\,\overline{OG}(1 - cos\alpha) = Mg\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ para } a = b$$

Essa energia potencial é nula, e (pelo TEC) a energia cinética é máxima quando G está no ponto mais baixo da sua trajetória. Como neste instante G é o CIR, $\vec{\boldsymbol{v}}_G = \vec{\mathbf{0}}$ e a velocidade angular é máxima. Assim:

$$J_G = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = \frac{M}{6}a^2, \text{ para } a = b \quad \text{e} \quad T_{máx} = \frac{\omega^2_{máx}}{2}J_G = Mg\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;\Rightarrow\; \omega_{max} = \sqrt{\frac{6g}{a}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

d) Pelas figuras: $\theta = 2\alpha = 90°$, para $a = b$

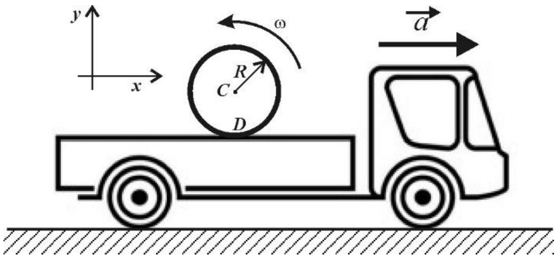
Em *t=0*, $\omega = 0$	Quando **θ**=α , $\omega = \omega_{max}$	Em $\theta = 2\alpha$, $\omega = 0$ pela 1ª vez após o início do movimento.
		

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

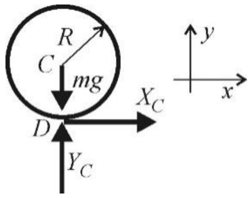
Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos). O tubulão de concreto de massa m tem raio médio R e momento de inércia J_{Cz} em relação ao seu eixo, e foi colocado sem nenhum calço na carroceira do caminhão, conforme mostrado na figura. O caminhão tem tração traseira, partiu do repouso e avança com uma aceleração de módulo a constante. Suponha que o tubulão role sem escorregar na carroceria do caminhão e despreze sua espessura. Nestas condições, determine (utilize $J_{Cz} = \frac{mR^2}{2}$):



(a) A velocidade do ponto D do tubulão, em contato com o caminhão. **(0,5 ponto)**
(b) A velocidade do ponto C do tubulão, em função da sua rotação ω. **(0,5 ponto)**
(c) A aceleração do ponto C do tubulão, em função de ω e $\dot{\omega}$. **(0,5 ponto)**
(d) A aceleração rotacional $\dot{\omega}$ do tubulão. **(1,0 ponto)**
(e) A aceleração do ponto D do tubulão, em função de ω e $\dot{\omega}$. **(1,0 ponto)**

RESOLUÇÃO



(a) Cinemática: ponto D do caminhão: $\vec{\boldsymbol{a}}_{Dcam} = a\vec{\mathbf{i}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}}_{Dcam} = (at)\vec{\mathbf{i}}$ **0,5 ponto**

(b) Ponto D do tubulão, sem escorregamento: $\vec{\boldsymbol{v}}_{Dtub} = \vec{D}_{Dcam} = (at)\vec{\mathbf{i}}$

Cinemática:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_C = \vec{\boldsymbol{v}}_{Dtub} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge (C - D) = \vec{\boldsymbol{v}}_{Dcam} + \omega\vec{\mathbf{k}} \wedge R\vec{\mathbf{j}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}}_C = at\vec{\mathbf{i}} - \omega R\vec{\mathbf{i}} = (at - \omega R)\vec{\mathbf{i}}$$ **0,5 ponto**

(c) Derivando: $\vec{\boldsymbol{a}}_C = (a - \dot{\omega}R)\vec{\mathbf{i}}$ (1) **0,5 ponto**

(d) Teorema da Resultante (TR), usando (1):

$$m\vec{\boldsymbol{a}}_C = m(a - \dot{\omega}R)\vec{\mathbf{i}} = X_C\vec{\mathbf{i}} + (Y_C - mg)\vec{\mathbf{j}} \Rightarrow \begin{cases} m(a - \dot{\omega}R) = X_C \\ 0 = Y_C - mg \end{cases} \quad (2)$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), polo C:

$$J_C\dot{\omega} = M_C = R \cdot X_C \Rightarrow X_C = \frac{J_C}{R}\dot{\omega}$$

Substituindo em (2): $m(a - \dot{\omega}R) = X_C = \frac{J_C}{R}\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{mRa}{J_C + mR^2}$ **1 ponto**

(e) Cinemática:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{Dtub} = \vec{\boldsymbol{a}}_C + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \wedge (D - C) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge [\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge (D - C)]$$

$$= (a - \dot{\omega}R)\vec{\mathbf{i}} + \dot{\omega}\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(-R\vec{\mathbf{j}}\right) + \omega\vec{\mathbf{k}} \wedge \left[\omega\vec{\mathbf{k}} \wedge \left(-R\vec{\mathbf{j}}\right)\right] \Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}}_{Dtub} = a\vec{\mathbf{i}} + (\omega^2 R)\vec{\mathbf{j}}$$ **1 ponto**